Auctore Petro Bourdin
ut ex Epist.a nuncu-
patoria

PRIMA

GEOMETRIÆ ELEMENTA.

Ad vſum Academiæ Mathematicæ Collegij Claromontani Societatis IESV, Pariſijs.

PARISIIS,
Apud PETRVM BILLAINE, viâ Iacobæâ, ſub ſigno Bonæ Fidei.

M. DC. XXXIX.
Cum Priuilegio Regis.

LECTORI BENEVOLO.

P*Roludimus hisce primis Geome-*
iæ Elementis in eorum
ratiam, qui Mathesim
uidem nosse volunt, &
lius frui deliciis, adyta
ero, & operta myste-
a ob studia alia, quibus
int intenti, reformi-
ant, daturi Deo fauen-

ā

te Geometriam integram suo loco cum cæteris Eucyclopædiæ Mathematicæ facultatibus. De cætero te si nouitas agendi, demonstrandique mouet, adi notas Geometricas; ac, si tibi illæ non fecerint satis, Examen Geometricum, quod suo tempore fiet, expecta.

PETRVS BOVRDIN.
è Societate IESV.

MONITVM.

VT notæ, quæ ſunt ad marginem, intelliantur facile, littera T. ſinificat Theorema. A. Axioa. D. Definitionē. P. Prolema, ac ſic interpretabere T. 2. Tertium Theorea libri ſecundi. 2. A. 3. ſeundum Axioma libri terj.

Introductio.

1. TRiplex est Geometria: Speculatiua, quæ tota est in considerandis proprietatibus magnitudinum: Practica, quæ in efficiendis figuris versatur: Mixta, quæ partim speculatur, partim agit. Speculatiua habet Theoremata: Practica Problemata: Mixta denique Problemata Theorematis admiscet.

2. Theorema est propositio definita de subiecto aliquo proprietatem demonstrans.

Ita de triangulo Isoscele os-

ıdit tanquam proprietatem, ıos angulos, qui ſunt ad ban, eſſe inter ſe æquales; ac opoſitum illud ſuum definitè ofert, hoc modo. Iſoſcelis anguli anguli ad baſim ſunt ter ſe æquales.

3. Problema eſt propoſitio definita modum aperiens efciendi aliquid certò.

Ita modum tradit deſcriben- trianguli æquilateri; ac pro- oſitum ſuum effert indefinitè oc modo. Super data linea iangulum æquilaterum conitüere.

4. Elementa Geometriæ peculatiuæ ſunt generalia quæam Theoremata, quorum ſus eſt frequentiſſimus ad inelligenda, & demonſtranda a, quæ in Mathematicis fa-

cultatibus ſunt occulta.

Nempe vt Elementa vulgo appellantur ea corpora, in quæ inſoluuntur mixta: ita Theoremata illa, in quæ reſolui ſolent mathematicæ demonſtrationes, Elementa vocari poſſunt. Aut ſane, vt is, qui literas, & elementa nouit, poteſt legere obuios libros: ita qui Theoremata illa generalia habet perſpecta, facilè adit, & capit obuia quæque ex Opticis, Aſtronomicis, & ſimilibus.

5. Elementa Geometriæ Practicæ ſunt Problemata quędam communia, quorum vſus eſt frequentiſſimus in effectione rerum mathematicarum.

Nempe vt Elementa appellantur ea corpora, ex quibus mixta componuntur; ita pro-

mata illa, quæ passim effi-
ndis rebus mathematicis in
uiunt, vocari possunt Ele-
enta. Atque vt is, qui nouit
ormare literas, exarare po-
st, & exprimere quæuis vo-
bula, & sententias: ita qui
oblemata illa communia ha-
t ad manum, facilè potest
a quæuis præstare.

6. Elementa Geometriæ
ixtæ partim ex theorematis
eculatiuæ, partim ex proble-
atis Practicæ componuntur.
Talia sunt Elementa Eucli-
is, qui Geometriam Mixtam
st complexus.

7. Geometria Speculatiua
onnihil supponit: scilicet Pos-
ibilia communia, & Principia
rima, siue Axiomata.

Possibilia illa communia

ſunt ea, quorum habentur definitiones, vt ſunt Triangulum, Quadratum, Circulus, & quæ cum iis neceſſariam habent connexionem, quale eſt illud. A quouis puncto in quamcunque partem duci poteſt recta linea, & ſimilia, quæ ſuo loco afferentur.

Principia vero, aut Axiomata ſunt Propoſitiones quædam per ſe notę, & quæ ſola egent explicatione terminorum. Tale eſt iſtud. Omne totum eſt ſua parte maius.

8 Geometria Practica nonnulla etiam ſupponit: nempe Poſtulata quædam, nec non & Poſſibilia, & Axiomata, & Theoremata ſpeculatiuæ.

Poſtulata vero illa ſunt Nonnulla tam facilia, vt recuſari

ɔn poſſint. Tale eſt illud. A
ıouis puncto ad quòduis pun-
um liceat rectam lineam du-
:re.

9. Geometria Mixta ſuppo-
t & Poſſibilia, & Poſtulata,
Axiomata.

Ita Euclides præter poſtula-
:a, & axiomata, quæ adduxit
ıtim in aditu Geometriæ ſuæ
ixtæ, etiam ſuppoſuit tan-
ıam Poſſibilia ea, quorum de-
ııtiones attulit, & quæ ſunt
ım iis coniuncta, vt videre eſt
notis geometricis.

10. Geometria Speculatiua,
:rinde ac Mixta, vt propoſitũ
heorema demonſtrent, inter-
ım ſine vlla præparatione de-
onſtrationem aggrediuntur,
terdum vero præparationem
iquam, aut requiſitæ rei con-

ſtructionem præmittunt, ſed peculiari ſibi modo: ac Mixta quidem abſolutè, Speculatiua vero conditionalè, vt ex notis intelligetur.

EOMETRIÆ SPECVLATIVÆ

LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

PVnctum eſt, cuius pars nulla.

2. Linea vero longitudo ſine latitudine. Lineę autem termini ſunt puncta.

Linea recta eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta. Talis eſt; A B non vero C D.



5. Superficies eſt, quæ longitudinem, & latitudinem tantum habet.

6. Superficiei autem extrema ſunt lineæ.

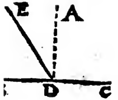
7. Plana ſuperficies eſt ea, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

8. Planus angulus eſt duarum linearum in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum iacentiū alterius ad alterā inclinatio. Talis eſt angulus, B A C: rectæ, B A, C A, inclinantur in A.



9. Cum autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, Rectilineus angulus appellatur. Talis eſt exterior B A C, non vero interior ex curuis lineis.

10. Rectus angulus eſt vnus illorum, qui fiunt ex linea recta incidente in lineam rectam ita, vt anguli, qui fiunt deinceps, ſiue hinc, & inde, ſint inter ſe æquales: ac linea illa incidens in aliam Perpendicularis illius appellatur.



Ita dum recta, A D cadens in rectam BC facit angulos hinc inde, A D B, A D C æquales inter se, facit eosdem rectos, ...aturque perpendicularis lineæ ..., vt viciſſim recta C D perpen...ularis eſt rectæ D A, etſi vnus tantum actu rectus C D A.

Obtuſus angulus ille eſt, qui Recto eſt maior. Talis eſt eadem in figura angulus E D C.

Acutus vero, qui minor eſt Recto, qualis, E D B.

Terminus eſt, quod alicuius extremum eſt.

Figura vero eſt, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur. Vt Circulus, Triangulum, Quadratum, &c.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis cõtinentur. Vt triangulum, quadratum, &c.

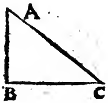
16. Trilateræ quidem, quæ ſub tribus; Quadrilateræ vero, quæ ſub quatuor; Multilateræ denique, quæ ſub pluribus.

17. Trilaterarum autem figurarum Æquilaterum eſt triangulum, quod tria habet latera æqualia.

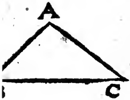
18. Iſoſceles vero, quod duo tantum æqualia.

19. Scalenum denique, quod tria inæqualia.

20. Ad hæc Trilaterarum figurarum, aut Trigonorum, Rectangulum eſt triangulum, quod rectum habet angulum vnum, & duos acutos. Tale

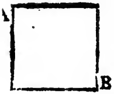


eſt ABC. Rectus B. acuti A, & C. Amblygonium vero, quod obtuſum habet angulum vnum,

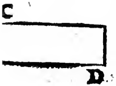


& duos acutos. Tale eſt BAC. Obtuſus A, acuti B,C. Oxigonium denique, quod tres habet acutos.

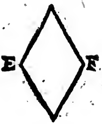
Quadrilaterarum autem figurarum Quadratum quidem eſt, quod & æquilarum eſt, & rectangulum. Tale, AB.



Oblongum vero, quod rectangulum quidem eſt, ſed non æquilaterum. Tale, CD.



23. Rombus autem, qui æquilaterus eſt, ſed non rectangulus. Talis E F.

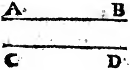


24. Rombo ides vero, qui nec æquilaterus eſt, nec rectangulus, ſed habet oppoſita latera æqualia, vti & angulos. Talis eſt, G H.



25. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia appellantur.

26. Parallelæ rectæ lineæ ſunt, quæ in eodem plano ex vtraque parte in infinitũ productæ, in neutram concurrunt: ſiue quę æqualiter vbique diſtant. Tales ſunt A B, C D.



Parallelogrammum est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela. Talia sunt Quadratum, Oblongum, Rombus, & Romboides.

Complementa vero sunt ea parallelogramma, quæ cōplent alia, quæ sunt circa diametrū, vt sunt A E, & E D, quæ complent C E, & E B, ad cōstituendum totum, A D.



POSSIBILIA.

A Quouis puncto ad quoduis punctum, & in quamcunque partem duci potest recta linea.

Quæuis linea recta potest in directum produci.

Ex maiori linea recta detrahi potest minor.

4. Cuilibet lineæ rectæ dari poteſt æqualis alia.
5. Cuiuis triangulo fieri poteſt aliud æquale.
6. Supra quamcunque lineam rectam fieri poteſt quadratum.
7. Ex quouis puncto lineæ rectæ educi poteſt linea recta angulum quemcunque faciens cum ea.
8. A quouis puncto extra lineam ſumpto duci poteſt linea recta illi parallela.

AXIOMATA.

1. QVæ eidem ſunt æqualia, inter ſe quoque ſunt æqualia; adeoque quod vno æqualium eſt maius, aut minus, altero quoque eſt maius, aut minus.
2. Si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia.
3. Si ab æqualibus æqualia auferãtur, quæ reſtabunt, erunt æqualia; ac ſi à toto minus, quam di-

midium auferatur, quod restabit, dimidio erit maius, & contra, & si ab inæqualibus æqualia auferantur, restabunt inæqualia.

4. Quæ eiusdem, aut æqualium sunt dupla, aut dimidia, inter se sunt æqualia, & contra.

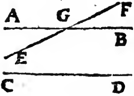
5. Quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia; æquales vero rectæ inter se congruunt.

Congruere vero illà dicuntur, quæ ad inuicem composita ita conueniunt, vt extrema cadant in extrema, nec excedant, nec excedantur; vt si linea pedalis pedali lineæ applicetur, extrema vnius puncta cadent in extrema alterius, & ambę vnam facient lineam.

6. Totum est sua parte maius; necnon æquale suis omnibus partibus, imo idem.

7. Omnes anguli recti inter se sunt æquales.

8. Linea, quæ vnam parallelarum ſecat, non eſt alteri parallela.



Ita ſi ſint parallelæ, duæ rectæ A B, C D, recta E F ſecans rectam A B, non eſt parallela ipſi C D. Et vero ex vna parte G E, magis, ac magis accedit ad rectam C D: ex altera vero, G F magis, ac magis ab eadem C D recedit, contra naturam parallelarum, quæ vbique æqualiter diſtant.

9 In magnitudinibus eiuſdem rationis, ſi vna non eſt alia maior, nec minor, eſt æqualis: aut ſi nec minor eſt, nec æqualis, eſt maior: aut ſi nec maior eſt, nec æqualis, eſt minor, ac ſi ambæ non ſint inæquales interſe, ſunt æquales, & contra.

Sunt autem eiuſdem rationis linea recta cum linea recta, angulus

rectilineus cum rectilineo, & similes.

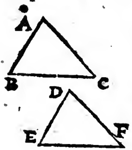
10 Quod ostenditur contrarium hypothesi factæ, aut Axiomati, aut Theoremati, iam demonstrato, falsum est, nec esse potest.

PROPOSITIONES.

THEOREMA PRIMVM.

IN duobus triangulis omnia colliguntur æqualia ex duobus lateribus æqualibus, & illorum angulo.

Propositio. Si duo triangula A B C, & D E F habeant duo latera AB, & A C æqualia duobus D E, & D F vtrumque vtrique, habeant vero & angulum A



æqualem angulo D sub æqualibus

lateribus contentum; Etiam baſim BC baſi EF æqualem habebunt, eritque triangulum ABC triangulo DEF æquale, & reliqui anguli B, & C reliquis E, & F æquales erunt, prout ijs æqualia latera ſubtenduntur.

Præparatio. Quia quæ congruunt æqualia ſunt, intelligatur triangulum ABC ſuperponi triãgulo DEF, itaut apex A ſit ſupra apicem D, & latus AB ſupra latus DE.

Demonſtratio. Quia latus AB ſupponitur æquale lateri DE, & apex A reſpondet apici D, punctum B cadet in punctum E, totaque recta AB congruet cum recta DE. Rurſum quia angulus A ſupponitur æqualis angulo D, & applicatum eſt latus AB lateri DE, latus AC cadet in latus DF; & quia latus AC ſupponitur æquale lateri DF, & apex A eſt ſupra apicem D, cadet punctum C in pũctum F, totaque recta AC cõgruet rectæ DF: Et quia puncta B, & C ſunt termini baſis BC, &

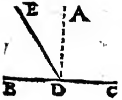
cadunt

cadunt ſupra E, & F, cadet ipſa quoque baſis BC ſupra baſim E F, & cum illa congruet; atque adeo per 5 Axioma baſis BC erit æqualis baſi E F, & triangulum A B C triangulo DEF, & angulus B angulo E, & angulus C angulo F. Quod demonſtrandum erat.

THEOREMA 2.

Recta in rectam incidens angulos facit aut rectos, aut æquales duobus rectis.

Propoſitio. Cum recta linea E D ſupra rectam BC conſiſtens angulos facit EDB & EDC: aut duos rectos faciet, aut duobus rectis æquales.



Præparatio. Educatur ex puncto D perpendicularis DA faciens æqua-

les angulos ADB, & ADC.

Demonſtratio vel recta ED conſentit cum AD, ac facit æquales angulos, vel non conſentit, ſed eſt inclinata in vnam partem, ac relinquit angulum inter vtramque. Si conſentit, ac facit æquales angulos, facit rectos, ex definitione recti anguli: ſi non conſentit, duo anguli, quos facit EDB, & EDC erunt ęquales tribus BDE, & EDA, & ADC (nempe BDE ſibi ipſe, & EDC duobus angulis, quos continet, per 6. axioma) Sed & iiſdem tribus angulis ſunt æquales duo recti BDA, & CDA (nempe CDA ſibi ipſe, & BDA duobus quos continet, per idem axioma) ergo per 1. axi. Duo anguli EDB, & EDC ſunt æquales duobus rectis ADB, & ADC, quod demonſtrandum erat.

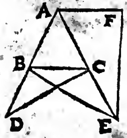
THEOREMA 3.

E*X æqualibus lateribus æquales ad basim anguli.*

Propositio. Isoscelis trianguli ABC, qui ad basim BC sunt anguli ABC, & ACB, inter se sunt æquales.

Præparatio. Sumantur in productis lateribus AB, & AC partes æquales BD, & CE, vt totæ AD, & AE sint æquales per 2. axioma: ducantur, deinde rectæ BE, & CD, atque ad punctum A ducatur recta AF, eáque æqualis lateri AC, & faciẽs angulũ FAC ęqualem angulo BAC, ducaturque tandem recta FE.

Demonstratio. In duobus triangulis



FAE, & BAE duo latera AF, AE sunt æqualia duobus AB, AE, & angulus FAE angulo BAE. ergo per 1. Theorema basis

FE eſt æqualis baſi BE, & angulus
FEA angulo AEB. Rurſum in trian-
gulis FAE, & CAD duo latera FA,
AE ſunt æqualia duobus CA, AD,
& angulus FAE angulo CAD. ergo
a 1.T.1. [a]baſis DC eſt ęqualis EF, & angulus
b 1.A.1. ADC angulo AEF. ergo & [b] baſis
BE eſt æqualis DC, & angulus
ADC angulo AEB. Rurſum in
triangulis BDC, & CEB duo latera
BD, DC ſunt æqualia duobus CE,
c 1.T.1. EB, & angulus D angulo E. ergo [c] an-
gulus DBC eſt æqualis angulo
ECB. Tandem duo anguli CBA &
d 3.T.1. CBD [d] ſunt æquales duobus rectis,
e 1.A.1. perinde ac duo BCA, BCE. ergo [e]
duo CBA, CBD ſunt æquales duo-
bus BCA, BCE. ergo & ablatis æ-
f 3.A.1. qualibus CBD, BCE reſtabunt [f] æ-
quales duo ACB, ABC, quod de-
monſtrandum erat.

THEOREMA 4.

A*Nguli ad verticem æquales.*

Propositio. Si duæ rectæ AB, CD se mutuo secuerint, angulos ad verticẽ æquales inter se facient, AEC, & DEB, itemque AED & CEB.



Demonstratio.

Duo anguli CEA, CEB sunt æquales duobus rectis,[a] perinde ac duo BEC, BED. ergo[b] duo CEA, CEB sunt æquales duobus BEC, BED. ergo[c] ablato communi CEB restabunt æquales AEC, & BED. quod demonstrandum erat. Idem fiet circa duos alios.

a 2. T. 1.
b 1. A 1.
c 3. A. 1.

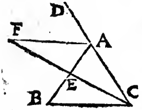
THEOREMA 5.

Angulus externus vtrouis interno, & oppoſito maior.

Propoſitio. Cuiuſuis trianguli ABC vno latere CA producto verſus D, exterior angulus BAD vtrouis interno eſt maior, tum alterno ABC, tum oppoſito ACB.

Prima pars de alterno.

Præparatio. Diuidatur bifariam latus AB in puncto E, per quod ducatur CE, producaturque ita, vt EF ſit æqualis ipſi EC, ac tandem ducatur FA.



Demonſtratio. In triangulis AEF, & BEC duo latera AE, EF ſunt æqualia duobus BE, EC,& a angulus

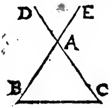
a 4.T.1.

AEF angulo BEC. ergo [b] angulus FAE æqualis eſt angulo CBE. Eſt autem DAE [c] maior quam FAE. ergo & maior alterno CBA. b 1.T.1. c 6. A.1.

Secunda pars de oppoſito.

Præparatio. Producatur latus BA verſus E.

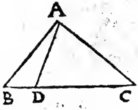
Demonſtratio. Angulus DAB eſt [a] æqualis EAC. Eſt autem EAC per præcedentem partem maior alterno ACB. ergo & DAB maior eſt eodem ACB. a 4.T.1.



THEOREMA 6.

EX maiori latere maior angulus.

Propoſitio. In quouis triangulo



ABC ſi latus vnũ BC maius eſt alio quouis AC, maior quoque eſt angulus oppoſitus BAC oppoſito ABC.

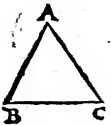
Præparatio. Ex ſuppoſito maiori CB ſumatur CD æquale ipſi CA, ducaturque AD.

Demonſtratio. Angulus CDA ma-
a 5. T. 1. ior eſt [a] angulo B, nempe externus interno. Eſt autem CAD æqualis
b 3. T. 1. [b] ipſi CDA. ergo & CAD maior eſt B. ergo & multo magis totus CAB maior eſt B.

THEOREMA 7.

Ex maiori angulo maius latus.

Propoſitio. In quouis triangulo



ABC si angulus vnus A maior est alio quouis B, etiam latus oppositum BC maius est opposito AC.

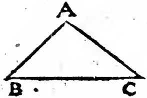
Demonstratio. Si CB esset æquale CA, esset [a] angulus A æqualis angulo B; contra hypothesim. Si vero CB esset minus CA, esset quoque [b] angulus A minor angulo B; contra hypoth. Ergo [c] cum CB nec æquale sit nec minus CA, est maius.

a 5.T.1.
b 6.T.1.
c 9.A.1.

THEOREMA 8.

Ex angulis ad basim æqualibus æqualia latera.

Propositio. Si trianguli ABC duo an-



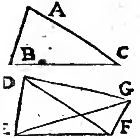
guli B, & C æquales inter se fuerint, æqualia quoque erunt opposita latera BA, CA.

Demonstratio. Si AB esset maius
a 6.T.1. AC, esset[a] angulus C maior angu-
lo B; contra hypot. Si vero AB esset
b 6.T.1. minus AC esset[b] angulus C minor
angulo B; contra hypoth. Ergo cum
c 9.A.1. AB non sit maius, nec minus AC, [c]
erit ęquale.

THEOREMA 9.

IN duobus triangulis ex duobus lateribus æqualibus, & angulo maiore, maior basis.

Propositio. Si duo triangula ABC,



D E F habuerint duo latera AB, AC æqualia duobus vnum vni, angulũ vero BAC maiorem angulo EDF sub iisdem lateribus; etiam basim B C basi EF maiorem habebunt.

Præparatio. Quia angulus B D F minor supponitur angulo A, fiat EDG æqualis ipsi A, sumaturque DG æquale ipsi DF, hoc est AC, ducaturque recta GE, & GF, si est opus.

Demonstratio. In triangulis ABC, DEG duo latera AB, AC sunt æqualia duobus DE, DG, & angulus A angulo EDG. Ergo [a] & basis BC est æqualis basi EG. Rursum in triangulo DFH duo latera DG, DF sunt æqualia. Ergo [b] & angulus DFG æqualis est DGF. Est autem DGF [c] maior EGF. ergo & angulus DFG maior est EGF. ergo multò magis totus EFG maior erit

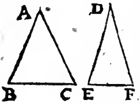
a 1.T. 1.
b 5.T. 1.
c 6.A. 1.

EGF. Ergo cum in triangulo E G F angulus E F G maior ſit angulo
d 7.T. 1. E G F,[d] maius erit latus E G latere EF. Eſt autem BC æquale E G. ergo & B C maius eſt EF. Quod ſi recta E G incidat in EF, totum ſua parte maius ſatis intelligetur.

THEOREMA 10.

IN duobus triangulis ex duobus lateribus æqualibus, & maiore baſi maior angulus.

Propoſitio. Si duo triangula ABC, DEF æqualia habuerint duo latera A B, AC duobus DE, D F, vnũ vni, baſim vero BC baſi EF maiorẽ: Angulum quoque A ſub ijs contentum angulo D maiorem habebunt.



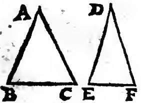
Demonſtratio. Si angulus A ipſi D eſſet

eſſet æqualis, eſſet[a] quoque baſis a 1.T.1.
B C æqualis E F, contra hypoth.
Si vero A eſſet minor B, minor
quoque[b] eſſet baſis B C baſi E F, b 9.T.1.
contra hypoth. Ergo cum angulus
A nec ſit æqualis, nec minor angulo D, erit maior

THEOREMA 11.

IN duobus triangulis ex æqualibus lateribus, & baſi æqualia omnia.

Propoſitio. ſi duo triangula ABC, DEF duo latera AB, AC habuerint æqualia duobus DE, DF vnum vni, & baſim BC baſi EF æqualem; angulum quoque ſub æqualibus lateribus contentum A angulo D æqualem habebunt; eruntq; æqualia omnia.



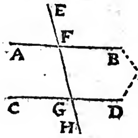
Demonſtratio. Si angulus A maior eſſet D, maior[a] eſſet baſis BC baſi EF, contra hypoth. Si vero A eſſet minor D, eſſet quoque baſis BC minor EF contra hypoth. Ergo angulus A cum nec maior ſit nec minor D, eſt æqualis. Ergo & per primum Theorema æquales ſunt reliqui anguli B, E & C, F, & ipſa triangula.

a 9. T. 1.

THEOREMA 12.

Parallelæ ex æqualibus alternis angulis.

Propoſitio. Si in binas rectas AB, CD incidens recta EH fecerit æquales inter ſe alternos angulos AFG, FGD, parallelæ erunt inter ſe rectæ linea AB, CD.



Præparatio. Si non sunt parallelæ, concurrant versus aliquam partem puta I, ita vt fiat triangulum. FIG.

Demonstratio. In triangulo FIG externus[a] angulus AFG maior esset alterno FGD, contra hypoth. Ergo cum rectę AB, CD, non possint concurrere,[b] sunt parallelæ. a 5 T. 6. b 26. D. 1.

THEOREMA 13.

PArallelæ ex æqualibus angulis oppositis, vel internis æqualibus duobus rectis.

Propositio Si in duas rectas AB, CD recta incidens EH fecerit externum angulum EFA æqualem interno, & opposito ad easdem partes FGC; aut sane duos internos BFG, FGD duobus rectis æquales, erunt inter se parallelæ duæ illę lineæ AB, CD. Figura Theor. præced.

Demonstratio primæ partis. Angulus

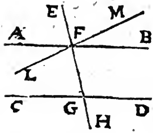
FGC æqualis ponitur angulo EFA.
a 4.T.1. Eſt autem[a] eidem EFA æqualis angulus BFG ad verticem. Ergo angulus FGC eſt æqualis angulo BFG:
b 12.T.1. ſunt vero illi ambo alterni. Ergo[b] & parallelæ lineæ AB, CD.

Demonſtratio ſecundæ partis. Duo anguli BFG, DGF ponuntur æquales duobus rectis: ſunt[c] vero iiſ-
c 2.T.1. dem duobus rectis æquales duo GFA, GFB. ergo duo BFG, DGF ſunt æquales duobus GFA, GFB. ergo ablato communi BFG reſtabunt alterni duo æquales AFG,
d 12.T.1. FGD ergo[d] & parallelæ ſunt lineę AB, CD.

THEOREMA 14.

Ex parallelis alterni anguli æquales.

Propoſitio. In parallelas AB, CD



recta incidens EH facit æquales inter se angulos alternos AFG, FGD.

Demonstratio. Si AFG & FGD essent inæquales, ac maior esset AFG ipso FGD, sumi posset in AFG angulus LFG æqualis alterno FGD. ergo & recta LF producta versus M esset [a] parallela ipsi CD. ergo & recta AB parallelam LM secans non esset parallela ipsi CD, contra hypoth. ergo [b] cum duo alterni AFG, FGD non sint inæquales, erunt æquales. a 12.T.1. b 9.A.1.

THEOREMA 15.

Ex parallelis æquales anguli oppositi, uti & interni duobus rectis.

Propositio In parallelas AB, CD recta incidens EH facit æquales Figura Th. 12.

inter se oppositos ad easdem partes angulos internum FGD, & externum EFB. Item duos internos ad easdem partes BFG, DGF æquales duobus rectis.

Demonstratio primæ partis. Angulus a FGD æqualis est alterno AFG. Eidem vero AFG æqualis [b] est EFB. Ergo FGD æqualis est EFB.

a 14. T. 1.
b 4. T. 1.

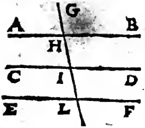
Demonstratio secundæ partis. Angulus AFG æqualis [c] est alterno FGD. Ergo si vtrimque addatur angulus GFB. Duo DGF, BFG erunt æquales duobus GFA, GFB. sunt autem illi [d] æquales duobus rectis. Ergo & duo BFG, DGF sunt æquales duobus rectis.

c 14. T. 1.
d 2. T. 1.

THEOREMA 16.

Eidem parallelæ sunt inter se parallelæ.

Propositio. Quæ eidem lineæ CD



sũt parallelæ AB, EF, inter se quoque sunt parallelæ AB,EF.

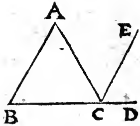
Demonstratio. Angulus G H A æqualis est [a] interno H I C. Est & H C æqualis [b] interno I L E. Ergo GHA externus æqualis est interno I L E. ergo [c] & parallelæ sunt AB,EF.

a 14.T.1.
b 14.T 1.
c [illegible].T.1.

THEOREMA 17.

EXternus angulus æqualis est duobus internis oppositis, & Trianguli tres anguli æquales duobus rectis.

Propositio. Omnis trianguli ABC



vno latere producto B C externus angulus ACD duobus internis oppositis A, & B est æqualis, & trianguli ABC tres anguli A, B, C sunt æquales duobus rectis.

Præparatio. Producto latere BC versus D, ex puncto C educatur CE parallela ipsi BA.

Demonstratio primæ partis. Recta AC incidit in parallelas A B, CE.

a 14.T.1. Ergo [a] angulus A æqualis est alterno ACE. Item recta BC incidit in

b 14.A.1. parallelas BA, CE ergo [b] angulus B æqualis est externo ECD. Ergo duo A & B sunt æquales duobus ACE, ECD, hoc est toti ACD.

Demonstratio secundæ partis. Duo anguli A, B sunt æquales angulo ACD. ergo addito communi ACB, tres anguli A, B, ACB sunt æquales

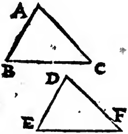
c 2.T.1. duobus ACD, ACB. sunt [c] autem

d 1.T.1. iisdem æquales duo recti. ergo [d] &

tres A,B,ACB sunt æquales duobus rectis.

THEOREMA 18.

IN duobus triangulis ex æqualibus, duobus angulis tertius æqualis.



Propositio. Si duo triangula ABC, DEF habeant duos angulos B, C æquales duobus E, F, tertius quoque A erit æqualis tertio D.

Demonstratio. Tres anguli A, B, C sunt æquales [a] duobus rectis, perinde ac tres D, E, F. ergo tres A, B, C sunt æquales tribus D, E, F. ergo [b] ablatis æqualibus B, C, & E, F, restabunt A, & D æquales.

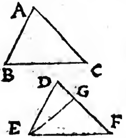
a 16. T. 1.

b 3. A. 1.

THEOREMA 19.

IN duobus triangulis ex duobus, aut tribus angulis æqualibus, & vno latere, æqualia omnia.

Propoſitio. Si duo triangula ABC, D E F habeant duos, adeoque tres angulos æquales tribus vnũ vni, & latus BC lateri EF, reliqua latera erunt æqualia, & tota triangula.



Præparatio. Si AC & DE ſunt inæqualia, ac ſi maius eſt DF, reſcindatur ex eo FG æquale CA, ducaturque EG.

Demonſtratio. In duobus triangulis ABC, GEF duo latera BC, CA ſunt æqualia duobus EF, FG, & angulus C æqualis angulo F. ergo [a] angulus B erit angulo GEF æqualis.

a 1.T.1.

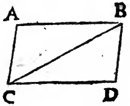
Eſt autem GEF minor toto DEF. Ergo [b] & angulus B minor eſt angulo DEF, contra hypoth. Ergo [c] cum AC, & DF non ſint inæqualia, ſunt æqualia. Ergo in duobus triangulis ABC, DEF duo latera CB, CA ſunt æqualia duobus FE, ED, & angulus C angulo F. ergo [d] & baſis AB baſi DE, & triangulum triangulo, &c.

b 1.A.
c 9. A.1.
d 1. A.1.

THEOREMA 20.

Quæ parallelas æquales iungunt, ſunt æquales, & parallelæ.

Propoſitio. Rectæ AC, BD quæ iungunt æquales, & parallelas AB, CD ad eaſdem partes, ipſæ quoque ſunt æquales, & parallelæ.



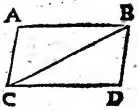
Præparatio. Ducatur diameter BC.

Demonstratio. Recta BC cadit in
a 14.T.1. parallelas AB, CD. ergo [a] angulus ABC æqualis est alterno DGB. ergo in duobus triangulis ABC, CDB duo latera BA, BC sunt æqualia duobus CD, BC, & angulus
b 1.T.1. ABC angulo DCB. Ergo [b] & basis AC est æqualis BD, & angulus ACB angulo DBC. Sunt vero alterni illi ex incidente BC in rectas
c 11.T.1. AC, BD. ergo [c] rectæ AC, BD sunt parallelæ.

THEOREMA 21.

Parallelogrammorum opposita latera æqualia, & anguli, vti & partes à diametro factæ.

Propositio. Omnis parallelogrammi AD



AD æqualia ſunt inter ſe latera oppoſita AB, CD & AC,BD. & anguli B,C,& A,D; atque illud bifariam ſecat diameter AD, vt ſint æqualia ABC,DCB. & vnum ex ijs ACB ſit dimidium parallelogrammi totius.

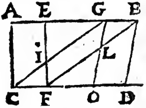
Demonſtratio. Parallelæ ſunt AB, CD,& in eas cadit CB. Ergo [a] angulus ABC eſt æqualis alterno BCD. Item parallelæ ſunt AC,BD, & in eas cadit CB. Ergo [b] angulus ACB æqualis eſt alterno CBD. Ergo duo anguli ACB, ABC ſunt æquales duobus DBC, BCD, ergo [c] & tertius A tertio D. eſt vero & latus CB commune; ergo [d] & æqualia latera AB,CD,& AC,BD, & triangula ABC, DCB.

a 14.T.1.
b 14.T.1.
c 18.A.1.
d 19.T.1.

THEOREMA 22.

Parallelogramma ſuper eadem, vel æquali baſi, & in iiſdem parallelis ſunt æqualia.

Propoſitio. Parallelogramma AF, FG ſuper eadem baſi CF, & in iiſdem parallelis AB, CD cõſtituta, inter ſe ſunt æqualia; perinde ac duo AF, GD ſuper æquali baſi CF, OD, & in iiſdem parallelis AB, CD.



Demonſtratio primæ partis. Rectæ AC, EF ſunt a parallelæ & æquales, & in eas cadit AB. Ergo b angulus CAE æqualis eſt externo FEG, eademque de cauſa angulus CGE æqualis eſt interno FBG. Ob parallelas CG, FB. Atque adeo in duobus

a 17.D. 1.
b 15.T.1.

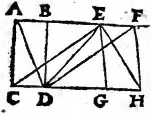
trianguli̇s A G C, E B F duo anguli CAG, AGC sunt æquales duobus FEB,EBF, & latus AC æquale [c] lateri EF. Ergo [d] & triangula sunt æqualia. Ergo & sublato communi triangulo EIG restant æqualia trapezia ACIE, & IFBG. Ergo & addito communi triangulo CIF duo parallelogramma AF, FG sunt æqualia. c 27.T.1. d 19.T.1.

Demonstratio secundæ partis AF est æquale FG per præcedentem partem: est & per eandem GD æquale eidem GF. Ergo [e] AF est æquale ipsi DG. e 1.A.1.

THEOREMA 23.

Triangula super eadem, vel æquali basi, & in iisdem parallelis sunt æqualia.

Propositio. Triangula ACD, ECD



ſuper eadem baſi CD, & in iiſdem parallelis AF, CH poſita, ſunt inter ſe æqualia; perindeac duo ACD, EGH ſuper ęquali baſi CD, GH & in iiſdem parallelis AF, CH.

Præparatio. Ducatur DB parallela ipſi CA. Nec non & DF ipſi CE. itemque HF ipſi GE.

Demonſtratio primæ partis. Duo pa-
a 22.T.1. rallelogramma AD, DE ſunt [a] æ-
b 21.T.1. qualia. Sunt vero [b] triangula ACD,
c 4 A. 1. ECD illorum dimidia. Ergo [c] & inter ſe æqualia.

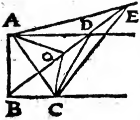
Demonſtratio ſecundæ partis. Paral-
d 22.T.1. lelogramma AD, EH ſunt [d] æqua-
e 21.T.1. lia. Sunt [e] vero triangula ACD, EGH illorum dimidia. Ergo, & inter ſe æqualia.

THEOREMA 24.

Triangula æqualia ſuper eadem baſi ſunt in iiſdem parallelis.

Propoſitio. Triangula ABC, DBC æqualia, & ſuper eadem baſi BC, ſunt in iiſdem parallelis AD,BC.

Præparatio. Ex A ducatur ipſi BC



parallela linea, quæ vel conueniet cum ipſa AD ducta per apices A,D, vel cadet ſupra, vt AE; vel infra, vt AO. Producatur vero BD vſque ad occurſum rectæ AE, & ducatur EC, itemque OC.

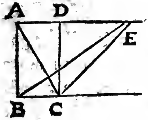
Demonſtratio. Si AE eſſet parallela ipſi BC, duo triangula ABC, EBC

a 23.T.1. super eadem basi BC essent a æqualia. Esset vero DBC minus toto EBC. Ergo & DBC minus ipso ABC. contra hypoth. Si vero AO esset parallela eidem BC, duo triangula ABC, OBC essent [b] æqualia. b 23.T.1. Esset vero DBC totum maius parte OBC ergo, & DBC esset maius ipso ABC, contra hypoth. Ergo cum parallela ipsi BC duci non possit ex apice A supra, neque infra AD, conueniet cum AD, eruntque triangula ABC, DBC in iisdem parallelis AD, BC.

THEOREMA 25.

PArallelogrammum est duplum trianguli super eadem basi, & in iisdem parallelis.

Propos. 10. Si parallelogrammum



AC, & triangulum EBC eandem basim BC habuerint, & fuerint in iisdem perallelis AE, BC, triangulum EBC erit dimidium parallelogrammi AC, & AC erit duplum EBC.

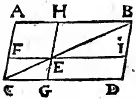
Præparatio. Ducatur diameter AC.

Demonstratio. Parallelogrammum AC duplum est trianguli [a] ABC. a 21.T.1. Est autem EBC æquale [c] ipsi ABC. c 25.T.1. Ergo Parallelogrammum AC duplum est trianguli EBC.

THEOREMA 26.

IN *parallelogrammis supplementa æqualia.*

Propositio. Omnis parallelogram-



mi A D eorum, quæ circa diametrum BC ſunt parallelogrammorũ ſupplementa AE. ED inter ſe ſunt æqualia.

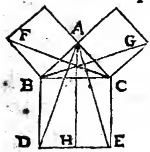
Demonſtratio. Triangula ABC, DCB ſunt [a] æqualia. Item FEC, GCE. Item HEB. IEB. Ergo ſi ab æqualibus triangulis ABC, DCB tollantur hinc FCE, HBE, inde vero æqualia GCE, IEB reſtabunt æqualia parallelogramma AE, ED.

a 41. T. 1.

THEOREMA 27.

IN rectangulo triangulo quadratum maximi lateris æquale eſt quadratis reliquorum.

Propoſitio. In triangulis rectangu-



lis ABC quadratum BE, quod fit à latere BC angulum rectum BAC subtendente, æquale est quadratis FA, GA, quæ fiunt ex lateribus AB, AC rectum angulum continentibus.

Præparatio. Ex apice A ducatur AH parallela ipsi BD. tum rectæ FC,BG,AD,AE.

Demonstratio. Quia duo anguli FBA, DBC recti sunt, & æquales, addito communi angulo ABC, duo FBC & ABD erunt æquales. Quare in triangulis FBC, ABD duo latera FB, BC sunt æqualia duobus AB, BD ex natura quadratorum: est & angulus FBC æqualis angulo ABD. Ergo [a] & duo triangula sunt inter se æqualia. Est vero triangulum FBC in iisdem parallelis BF, CA, & super eadem basi BF cum parallelogrammo AF. Ergo [b] & dimidium illius. Est etiam triangulum ABD in iisdem

a 1.T.1.

b 25.T.1.

parallelis DB, HA, & ſuper eadem baſi DB cum parallelogrammo AG. Ergo & illius quoque dimidium. c 4.A.1. Ergo c parallelogramma AF, & BH, quæ ſunt dupla æqualium triangulorum, inter ſe ſunt æqualia. Eodem modo demonſtrantur æqualia inter ſe parallelogramma AG, CH. Atque adeo totum quadratum DC æquale eſt quadratis AF, AG.

Finis libri primi.

GEOMETRIÆ SPECVLATIVÆ LIBER SECVNDVS.

DEFINITIONES.

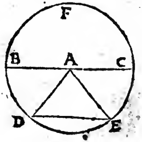
1. Circulus est figura plana, quæ sub vna linea ita comprehenditur, vt ab vno puncto, quod est intra figuram, lineæ omnes ductæ ad lineam terminantem sint æquales.
2. Circumferentia verò, aut Peripheria est linea circulum terminans.
3. Centrum est punctum, à quo lineę omnes ad circumferentiam ductæ sunt æquales.

4. Radius est linea à centro ad circumferentiam.

5. Diameter est linea recta per centrum ducta, & circulum bifariam diuidens: siue linea in circulo, in qua est centrum. Talis est BC.

6. Semicirculus est figura comprehensa sub diametro, & semipheria. Talis est BDEC.

7. Arcus est pars circumferentiæ, & quæ illius extrema connectit, Chorda appellatur. Arcus DE, & chorda DE.

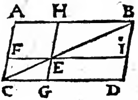


8. Segmentum est figura sub arcu, & chorda. Tale est DE, & DFE maius segmentum.

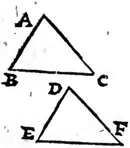
9. Segmenti angulus ille est, qui fit à chorda, & arcu. Talis est BDE, vel EDE.

10. An-

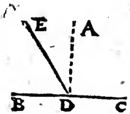
Pag.7



Pag. 12.

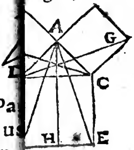


Pag. 14.



Figuræ, quæ ſuis locis deſ
& errata corrigi.

6. lin. 3. AG
ro DG
pag. 45.



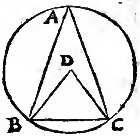
Pa
lus
in.
ED
pro



li

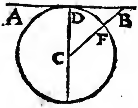
undo pagina 49.

pag.66.



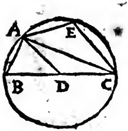


pag.72.

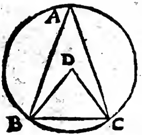


pag.73.lin.2.AB *pro* ABC.

pag.70.



10. Angulus in segmento ille est, qui



continetur à duabus rectis, quæ à finibus chordæ ad aliquod arcus punctum destinantur. Talis est angulus BAC in segmento BAC.

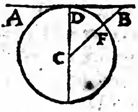
11. Angulus insistens peripheriæ, aut arcui ille est, qui continetur duabus rectis, quæ ab extremis finibus arcus ad centrum circuli, vel aliquod oppositæ circumferentiæ punctum destinantur. Talis est in centro BDC insistens peripheriæ BC. Talis etiam BAC eidem insistens ad peripheriam BAC.

12. Sector Circuli est figura contenta sub duabus rectis in centro angulum facientibus, & sub arcu ab eis sumpto. Tale est BDC sub lineis BD, DC, & arcu CB.

13. Similia ſegmenta ſunt ea, quæ æquales capiũt angulos. Ita ſegmenta maximi, & minimi circuli erunt ſimilia, ſi pares angulos capiant.

14. Æquales circuli illi ſunt, quorum diametri, vel radij ſunt æquales.

15. Recta circulum tangens illa eſt, quæ habens commune punctum in circumferentia, licet producatur, circulum non ſecat. Talis eſt recta GF circulum tangens in A.

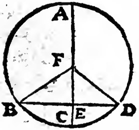


PROPOSITIONES.

THEOREMA PRIMVM.

Diameter rectam non diametrum secans bifariam perpendicularis illi est, & contra si perpendicularis est, secat bifariam.

Propositio. Si in circulo ABCD



diameter AC rectam BD per centrum non extensam bifariam secuerit in EB, ED, ad angulos quoque rectos eam secabit: Et contra si ad angulos rectos secuerit, bifariam secabit.

Praeparatio. Ducantur ex centro rectae FB, FD.

Demonstratio primae partis. In trian-

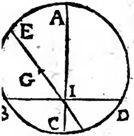
gulis FBE, FDE duo latera FB, BE ſunt æqualia duobus FD, DE, &
a 11.T.1. latus FE eſt commune. Ergo [a] angulus BEF eſt æqualis angulo DEF,
b 10.D.1. adeoque ambo recti. [b]

Demonſtratio ſecundæ partis. In triangulo Iſoſcele FBD duo anguli
c 5.T.1. B & D ſunt æquales, [c] atque adeo in triangulis FBE, FDE duo anguli B, & rectus FEB ſunt æquales duobus D, & recto FED, eſt quoque la-
d 19.T.1. tus FB æquale lateri FD. Ergo [d] & latus BE lateri DE.

THEOREMA 2.

R*ecta in circulo ſecans aliam non diametrum perpendiculariter, & biſariam, diameter eſt.*

Propoſitio. Si in circulo ABCD



recta A C aliam BD bifariam, & perpendiculariter in I. secuerit, erit circuli diameter.

Præparatio. Si centrum circuli extra rectam AC, sit in G, ac per G, perque punctum I ducatur diameter EGI.

Demonstratio. Diameter EG, rectam BD non extensam per centrum secat bifariam. Ergo [a] angulus GIB est rectus. Ergo totus AIB major est recto, contra hypoth. ergo cum centrum esse non possit extra rectam AC ipsa [c] diameter est habens centrum.

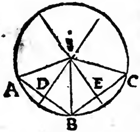
a 1. T. 2.

c 5. D. 2.

THEOREMA 3.

Plures lineæ æquales non nisi à centro exeunt.

Propositio. Si in circulo ABC ca-



piatur punctum aliquod I, & ab eo ad circumferentiam ducantur æquales plures lineæ, quam duæ IA, IB, IC, punctum acceptum I centrum eſt circuli.

Præparatio. Ducantur rectæ AB, BC, ac bifariam diuidantur in D, & E, ducanturque DI, EI.

Demonſtratio. In triangulis ADI, BDI, duo latera AD, AI. Sunt æqualia duobus BD, BI, eſt & baſis communis DI. Ergo angulus ADI
a 11.T.1. æqualis eſt angulo [a] BDI, adeoque
b 10.D.1. [b] ambo recti. ergo recta DI produ-
c 2.T.2. cta [c] eſt diameter. Eodem modo recta EI producta demonſtratur eſſe diameter. Ergo cum ambæ habeant centrum circuli, erit illud in communi illarum ſectione I.

THEOREMA 4.

Sola perpendicularis extremæ diametro circulum tangit, aliæ omnes secant.

Propositio. Quæ ab extremitate



diametri AB ducitur perpendiculariter AF, vel AG, illa cadit extra circulum, & in locum inter illam, & circulum altera linea non cadet, sed secabit circulum.

Prima pars.

Præparatio. Si perpendicularis cadit intra circulum vt recta AD, ducatur à centro C ad punctum sectionis D recta CD.

Demonſtratio. In triangulo ACD
a 17.T.1. tres anguli [a] ſunt æquales duobus rectis. Ergo ſublato angulo ACD duo reliqui ſunt minores duobus
b 3.T.1. rectis. Sunt autem [b] ambo inter ſe æquales. ergo & illorum quiſque minor recto, contra hypoth. Ergo cum recta AF non poſſit intra cir-
c 15.D.2. culum cadere, cadet extra, [c] ac circulum tanget.

Secunda pars.

Præparatio. Cadat ſi fieri poteſt recta AE inter rectam AG, & circulum, ducaturque à centro C perpendicularis ad rectam AE recta CE perducta extra circulum ad vſque AE, adeoque maior quouis circuli radio.

Demonſtratio. In triangulo CAE angulus CEA eſt rectus, & angulus
d 7.T.1. CAE minor recto. Ergo [d] latus CA maius eſt latere CE, contra hypoth. Ergo inter rectam tangentem, & circulum nulla ducetur linea, quæ

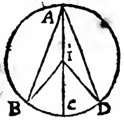
circulum non secet, solaque tangens non secabit.

Corollarium. Si quæ est ratio inter angulos curuilineos, & rectilineos, ac mixtos, angulus semicirculi maior est quouis acuto, & angulus contactus minor quouis acuto rectilineo.

THEOREMA 5.

Angulus ad centrum duplus est illius, qui ad circumferentiam.

Propositio. In circulo ABCD angulus BID, qui est ad centrum I, duplus est eius BAD, qui est ad circumferentiã, quando anguli eandem habuerint circumferentiam BCD.



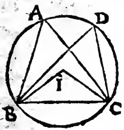
Præparatio. ducatur recta AI verſus C.

Demonſtratio. In triangulo B I A producto latere AI externus angulus BIC eſt æqualis duobus internis
a 17.T.1. IAB, & IBA.[a] Sunt vero illi æquales inter ſe ob latera æqualia IA,
b 3.T.1. IB.[b] Ergo angulus BIC duplus eſt vnius illorum, ſcilicet IAB. Eodem vero iure angulus CID duplus eſt anguli I A D. Ergo & totus BID duplus eſt totius BAD, valetque hæc ratio quacumque facta hypotheſi.

THEOREMA 6.

ANguli, qui ſunt in eodem ſegmento ſunt inter ſe æquales.

Propoſitio. In circulo ABC anguli



BAC, BDC, qui sunt in eodem segmento BAC, sunt æquales inter se.

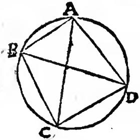
Præparatio. Ex centro I ducatur recta IB, IC.

Demonstratio. Angulus BIC duplus est anguli BAC. [a] Est etiam duplus anguli BDC. Ergo [b] BAC, & BDC sunt inter se æquales. a 5. T. 2. b 4. A. 1.

THEOREMA 7.

Quadrilatera in circulis angulos habent oppositos æquales duobus rectis.

Propositio: In circulo ABCD qua-



drilateri cuiuſuis ABCD anguli oppoſiti ABC, ADC, & BAD, BCD ſunt æquales duobus rectis.

Præparatio. Ducantur rectæ AC,BD.

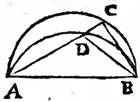
Demonſtratio. Duo anguli BDC, BAC ſunt in eodem ſegmento
a 5.T.2. BADC. Ergo a ſunt æquales. Item duo ADB. ACB ſunt in eodem ſegmento AD CB. Ergo & æquales. Ergo duo ADB, BDC ſunt æquales duobus BAC, BCA. ergo addito vtrimque angulo ABC, tres anguli ABC, BDA, BDC ſunt æquales tribus ABC, BAC, BCA. Sunt vero illi tres poſteriores æquales duobus re-
b 17.T.1. ctis. b Ergo & priores; hoc eſt ABC, & totus oppoſitus ADC.

THEOR.

THEOREMA 8.

SVper eadem linea segmenta similia sunt æqualia, & æquales habent circumferentias.

Propositio. Si super eadem linea A B duo segmenta similia constituantur ad easdem partes, erunt illa æqualia inter se, & æquales habebunt circumferentias.



Præparatio. Si segmenta non congruant, circumferentia vnius cadet extra circumferentiã alterius quomodocumque. Cadat itaque pars C extra aliam circumferentiam, ac sumatur in ea punctum C, ducaturque recta CA. Item CB, & DB.

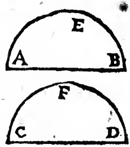
Demonstratio. Angulus ADB externus maior est interno A C B.

F

a 5.T.1. a Ergo duo segmenta ADB, ACB non sunt similia, contra hypoth. Ergo cum vnius circumferẽtia non possit cadere extra, aut intra alterius circumferentiam, cadet supra, ac congruent segmenta duo, & duæ
b 9.D.1. circumferentiæ. Ergo b & segmenta erunt æqualia, & circumferentiæ.

THEOREMA 9.

SVper æqualibus rectis similia segmenta sunt æqualia, & æquales circumferentiæ.



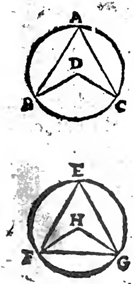
Propositio. Si super ęqualibus rectis AB, CD posita sint segmenta similia AEB, CFD, erunt illa inter se æqualia, vti & circumferentiæ.

Præparatio. Intelligatur segmenmentum AEB superponi segmento CFD.

Demonstratio. Recta AB congruet cum recta CD, & ambæ vnam facient lineam super qua duo erunt segmenta AEB, CFD. Ergo [a] & segmenta erunt æqualia inter se, & circumferentiæ: aut sane eadem recurrit demonstratio, quæ prius. a 8.T.2.

THEOREMA 10.

Æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis.



Propositio. In circulis æqualibus ABC, EFG æquales anguli siue ad centra BDC, FHG siue ad circumferentias BAC, FEG insistunt æqualibus circumferentiis BC, FG,

Prima pars ad centrum.

Præparatio. ducatur recta B C, FG.

Demonstratio. In triangulis B D C, F H G duo latera DB, D C sunt æqualia duobus HF, HG, & angulus D angulo H. Ergo a basis BC est æqualis basi FG. Præterea anguli B A C, F E G sunt dimidia angulo-
a 1. T. 1. rum æqualium D, & H. b ergo sunt inter se æquales. c Ergo segmenta B A C, F E G æquales angulos ca-
b. 5. T. 2. pientia sunt similia. d Ergo & cum
c 4. T. 1. sint super æqualibus lineis B C, F G erunt æqualia, & æquales illorum
d 13. D. 2. circumferentiæ. e Ergo si ab æqualibus æqualium circulorum circumferentiis auferantur æquales
e 9. T. 2. circumferentiæ ABC, FEG, restabunt æquales circumferentiæ B C, FG.

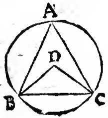
Secunda pars ad circumferentias.

Demonstratio. Anguli BAC, FEG ponuntur æquales. Sunt vero anguli BDC, FHG ad centra illorum dupli. [f] Ergo & æquales inter se. [g] Ergo & per præcedentem partem circumferentiæ BC, FG sunt æquales. f 5. T. 2. g 4. A. 1.

THEOREMA III.

ANguli super æqualibus circumferentiis sunt æquales.

Propositio. In circulis æqualibus ABC, EFG super æqualibus circũferentiis B C, F G insistentes anguli siue ad centra BDC, FIG, siue ad circumferen-





tias BAC, FEG ſunt inter ſe æquales.

Præparatio. Si anguli BDC, FIG non ſint æquales, ſit vnus maior, ſcilicet FIG, atque adeo in eo ſumatur HIG æqualis ipſi BDC.

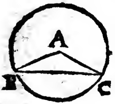
Demonſtratio. Duo anguli ad centra BDC, HIG ſunt æquales, & in circulis æqualibus. Ergo[a] circumferentiæ BC, HG ſunt æquales. Eſt vero FG maior, quam HG. Ergo & FG maior eſt, quam BC, contra hypoth. Ergo cum anguli ad centra non ſint inæquales, ſunt æquales. Eadem erit ratio angulorum ad circumferentiam.

a 10, T. 2.

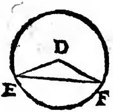
THEOREMA 12.

Æquales rectæ æquales auferunt circumferentias.

Propositio. In circulis æqualibus BC, EF æquales rectæ BC, EF auferunt circumferentias æquales BC, EF.



Præparatio. Ex centris ducantur rectæ AB, AC, & DE, DF.



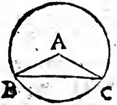
Demonstratio. In triangulis ABC, DEF duo latera AB, AC sunt æqualia duobus DE, DF, & basis BC basi EF. ergo [a] & angulus A angulo D. ergo [b] circumferentiæ BC, EF, quibus insistunt sunt æquales.

[a] 11.T.1.
[b] 10.T.2.

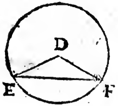
THEOREMA 13.

Æquales circumferentiæ æquales habent chordas.

Propositio. In circulis ęqualibus BC, EF sub æqualibus circũferentiis BC, EF æquales rectæ subtendũtur BC, EF.



Præparatio. Ducantur ex centris rectæ AB, AC, & DE, DF.

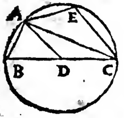


Demonstratio. Anguli ad centra BAC, EDF supponuntur insistere æqualibus circumferentiis BC,
a 11.T.2. EF. ergo a sunt inter se æquales.
Sunt vero & latera AB, AC æqua-
b 1.T.1. lia duobus DE, DF. ergo b & basis BC, basi EF.

THEOREMA 14.

ANgulus in semicirculo rectus est, in maiori segmento acutus, in minori obtusus.

Propositio. In circulo ABCE angulus BAC, qui est in semicirculo, rectus est: qui autẽ ABC in maiori est segmẽto ABC, acutus: qui vero AEC est in minori segmento AEC, obtusus.



Præparatio. Ex centro D ducatur DA.

Demonstratio primæ partis. In isoscele ADC duo anguli DCA, DAC sunt æquales. [a] Item in isoscele DBA duo anguli DBA, DAB sunt æquales. Ergo si angulo DCA addatur DBA, & æquali angulo DAC

a 3.T.1.

addatur æqualis DAB, duo anguli DCA, DBA erunt æquales duobus DAB, DAC, hoc est toti BAC. Sunt vero tres anguli BAC, ACB, ABC
b 17.T.1. æquales duobus rectis: [b] ergo angulus BAC dimidium duorum rectorum continet. Ergo & rectus est.

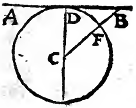
Demonstratio secundæ partis. Duo anguli ABC, ACB demonstrati sunt æquales vni recto, scilicet BAC. Ergo sublato ACB restabit angulus segmenti maioris ABC minor recto.

Demonstratio tertiæ partis. Quadrilaterum ABCE est in circulo. Ergo
c 7.T.2. [c] oppositi anguli ABC, AEC sunt æquales duobus rectis. Ergo sublato ABC, qui minor est recto, resta-
d 3.A.1. bit AEC recto maior.[d]

THEOREMA 15.

Recta à centro ad contactum ducta est perpendicularis tangenti.

Propositio. Si circulum tetigerit recta aliqua AB, à centro autem C ducta fuerit ad contactum D recta linea CD, ipsa erit tangenti AB perpendicularis.



Præparatio. Si recta CD non est perpendicularis ipsi AB, sit alia, si potest, CB vltra circumferentiam pertinens ad tangentem in B, faciensque angulum rectum CBD, adeoque in triangulo DCB maximum.

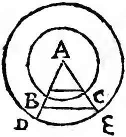
Demonstratio. In triangulo DCB latus CB extra circulum pertinens ad B maius est latere CD intra cir-

a 6.T.1. cumferentiam contento. Ergo [a] angulus CDB maior eſt angulo, qui ſupponitur rectus CBD, contra hypotheſim. Ergo cum alia non poſſit duci perpendicularis à centro C ad tangentem, erit ipſa CD.

THEOREMA 16.

Concētricorum Iſoſcelia ſunt æqui-angula.

Propoſitio. Si ſint ex eodem centro A deſcripti circuli BC, DE, ac ducti radij AD, AE, & chordæ BC, DE, & facta Iſoſcelia ABC, ADE, illa erunt æqui-angula



Demonſtratio. Tres anguli ABC, BCA, CAB ſunt æquales tribus
b 17.T.1. ADE, DEA, EAD. [a] Ergo ablato communi A reſtant æquales duo ABC

ABC, BCA duobus ADE, DEA. Sunt vero iidem duo AB, BCA æquales inter ſe, b perinde ac duo ADE, DEA. Ergo duo ABC, ADE dimidia æqualium ſunt interſe æquales, vti & duo BCA, DEA. b 3.T.1.

GEOMETRIÆ SPECVLATIVÆ LIBER TERTIVS.

DEFINITIONES.

1. RAtio est duarum magnitudinum quædam secundum capacitatem quantitatis habitudo.

Ita si decempeda sola sit, nullam rationem habet, nec maior est, aut minor, aut æqualis. Atsi comparetur cum alia, vt cum sexpeda, habet rationem aliquam secundùm quam maior appellatur, propterea quod aliam contineat certa quadam capacitate.

2. Capacitas quantitatis ea eſt ſecundùm quam vna quantitas aliam continet, vel partim, vel accuratè, vel cum exceſſu.

Atque hinc ortæ rationes variæ, ac ſi quantitas vna aliam continet tantum exportione, ſiue portionem illius aliquam, vt bipeda tripedam, Maior inæqualitas appellatur: Si vero accurate totam, vt ſexpeda ſexpedam, Æqualitas eſt: ſi denique pluſquam totam, vt ſexpeda bipedam, Maior inæqualitas vocatur. Hinc rationes variæ multiplex, ſubmultiplex, &c. imò rationales, & irrationales; ac rationales quidem illæ ſunt, quæ locum habent in magnitudinibus commenſurabilibus, ſiue quæ menſuram habent communem, & quæ numeris exprimi poſſunt: irrationales vero, quæ in magnitudinibus incommenſurabilibus, hoc eſt quæ nullam habent communem menſuram, & quæ numeris exprimi nequeunt, qualis eſt inter latus quadrati, & diametrum eiuſdem.

3. Comparatio rationis eſt duarum rationum quædam ſecundum capacitatem rationis habitudo.

Ita ſi ratio Tripla hoc eſt ſexpedę ad bipedam ſola ſit, illa rationem nullam habet, nec maior eſt, minor, aut æqualis. At vero ſi componatur cum ratione alia, vt cum dupla, ſiue ſexpedæ ad tripedam, tunc rationem habet aliquam, ac dicitur maior ratio, propterea quod maiorem habeat rationis capacitatem.

Atque inde fit, vt omnis comparatio rationis ſit inter quatuor terminos: nempe inter primam, & ſecundam quantitatem primæ rationis, & inter tertiam, & quartam ſecundæ, niſi forte terminus vnus bis ſumatur. En quatuor termini, vt 6. ad 3, ita 4. ad 2. Ecce vero tres. Vt 8. ad 4, ita 4. ad 2.

4. Capacitas rationis ea eſt ſecundum quam prima quantitatum inter quas eſt ratio ſecundam continet, aut æqualiter, aut plus, aut minus, quam tertia quartam. Atque

hinc ortæ comparationes variæ, vt sit vel maior ratio, vel minor, vel æqualis, siue eadem.

5. Æqualis, aut eadem ratio, quæ & proportio appellatur, tunc est quando positis hinc inde rationibus prima quantitas tantum continet secundam, quantum tertia quartam.

Ita proportio est, & Identitas rationis inter hos numeros 4. 2. & 6. 3, atque vt 4. bis continent 2, ita 6. bis capiunt 3.

6. Maior ratio tunc est quando prima quantitas plus continet secundam, quam tertia quartam; & contra Minor.

Ita si comparentur rationes illæ 8. ad 2, & 4. ad 2. prima erit maior secundâ: Si vero duæ illæ 2. ad 8. & 2. ad 4. prima erit minor secunda.

7. Magnitudo aliam magnitudinem plus continere dicitur, quando maiorem illius portionem continet, aut illam totam, aut illam totam, & illius portionem maiorem,

aut illam totam pluries, aut denique illam totam pluries, & maiorem illius portionem. Tantum vero continet, cum nec plus nec minus.

Ita tripeda plus partim continet ſexpedam, quam bipeda, nempe maiorem illius portionem: ita decempeda plus continet tripedam, quam ſexpedam: ita latus quadrati plus partim continet diametrum, quam media pars lateris, nempe maiorem illius portionem: ita diameter plus continet mediam partem lateris, quam totum latus.

8. Magnitudines eandem proportionem habentes appellantur Proportionales: ac prima quidem, & tertia vocantur Antecedentes; ſecunda vero, & quarta conſequentes.

Ita 9. ad 3, & 6. ad 2. ſunt proportionales; & 9. & 6. vocantur antecedentes, 3. vero, & 2. conſequentes. Dicis enim vt 9. ad 3, ita 6. ad 2. Ita lubet deinceps vti numeris commoditatis, & breuitatis gratia, at-

que illorum loco intelligi poterunt magnitudines tot palmorum, aut digitorum, quot numeris exprimentur.

9. Iterum in eadem ratione, siue proportionales esse dicuntur magnitudines prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando acceptis æquemultiplicibus quibusuis primæ, & tertiæ; & secundæ ac quartæ, multiplices primæ, & secundæ concordant cum multiplicibus tertiæ, & quartæ.

10. Concordare dicuntur multiplices, vti & quantitates binæ, & binæ, si, quando prima major est secunda, etiam tertia maior est quarta: aut si, quando prima est æqualis secundæ, tertia est æqualis quartæ; aut denique si, quando prima minor est secunda, tertia minor est quarta, secus discordant.

Definitio illa nona est secunda definitio proportionalium quantitatum, eaque petita ab earum proprietate perpetua, adeo, vt in qui-

bus magnitudinibus eà inſit, hæ ſint proportionales;& quæ ſunt proportionales , eam quoque proprietatem habeant. Talis vero illa eſt vt bene intelligatur.

Propoſitis quatuor numeris Proportionalibus, A, B; C, D; ſumptiſque primi A, ac tertij C æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem : item ſecundi B, & quarti D æquemultiplicibus iuxta quamcunque multiplicationem, ſi, vt pri-

E 9	A 3	C 6	F 18
G 4	B. 2	D 4	H 8
E 18	A. 3	C 6	F 36
G 18	B 2	D 4	H 36
E. 12	A. 3	C 6	F 24
G 14	B 2	D 4	H 28

mo in laterculo E multiplex primi A maior ſit G multiplici ſecundi B, erit F multiplex tertij C major H multi-

plice quartæ D. Et si, vt 2. in laterculo, multiplex primi A sit æqualis multiplici secundi B, erit multiplex tertij C æqualis multiplici quarti D. Ac denique si E minor sit G, erit & F minor H, vt tertio in laterculo.

11. Quando acceptis æquemultiplicibus primæ, & tertiæ magnitudinis itemque secundæ & quartæ, non semper concordant multiplices primæ, & secundæ cum multiplicibus tertiæ, & quartæ, tunc magnitudines illæ non sunt proportionales, sed maior est ratio primæ ad secundam, quam tertiæ ad quartam quando multiplex primæ superat multiplicem secundæ, & multiplex tertiæ non superat multiplicem quartæ.

Altera quoque est definitio magnitudinum non proportionalium, eaque petita à proprietate illarum perpetua, vt in quibus illa insit, hæ non sint proportionales, & quæ non sint proportionales, eam habeant proprietatem.

Porro Euclides vsus est postremis

hiſce definitionibus quantitatum Proportionalium, & non proportionalium, quod illæ ſint commodæ ſatis ad demonſtrandas proportionalium quantitatum, alias proprietates, quæ ab ea, tanquam à fonte deriuantur. Quare vtemur & nos adhibitis etiam cum erit opus iis, quas ſupra attulimus, propterea quod ſine illis nullus ſit in Geometria proportionalium quantitatum vſus.

12. Quando plures magnitudines continuè proportionales fuerint, prima dicitur habere ad tertiam duplicatam rationem illius, quam habet ad ſecundam: ad quartam vero triplicatam rationem illius, quam habet ad ſecundam.

Sint proportionales hi numeri. 2.4.8.16.32. Hoc eſt vt 2. ad 4, ita 4. ad 8, & 8. ad 16, & 16. ad 32. Si quæras rationem, quæ eſt inter primum 2, & tertium 8. dicam eſſe duplicatam illius, quæ eſt primi 2. ad ſecundum 4, hoc eſt eam bis eſſe fa-

ciendam, vt ad 8. perueniatur, cum dicendum sit vt 2. ad 4, ita 4 ad 8. adeoque bis comparandum. Si vero quæras rationem primi 2. ad quartum 16, dicam esse triplicatam illius, quæ est primi 2. ad secundum 4. hoc est ter esse comparationem illam repetendam, vt ad quartum 16. deueniatur. Nempe vt 2. ad 4, ita 4 ad 8, & 8. ad 16. & ita de quadruplicata ratione, & similibus.

13. Permutata ratio aut alterna est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Vt vbi dixisti, sicut 6. ad 3. ita 4. ad 2, si inferas. Ergo permutando vt 6. ad 4. ita 3. ad 2. Demonstratur vero Theoremate 6.

14. Inuersa, aut Conuersa ratio est sumptio consequentis tanquam antecedentis, ad antecedens tanquam ad consequens.

Vt vbi dixisti sicut 6 ad 3, ita 4 ad 2, si inferas. Ergo inuertendo vt 2 ad 4, ita 3 ad 6. Stabilitur vero ex defi-

nitione 5 & 9.

15. Compoſita ratio eſt ſumptio antecedentis cum conſequente tanquam vnius ad conſequens.

Vt vbi dixiſti, ſicut 12 ad 4, ita 6 ad 2, ſi inferas. Ergo componendo vt 12, & 4 (hoc eſt 16) ad 4; ita 6, & 2 (hoc eſt 8) ad 2. Stabilitur vero Theor. 8.

16. Diuiſa ratio eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequens, ad ipſum conſequens.

Vt vbi dixiſti. ſicut 12, & 4 (hoc eſt 16) ad 4; ita 6, & 2 (hoc eſt 8) ad 2, ſi inferas. Ergo diuidendo, vt 12 ad 4, ita 6 ad 2. Stabilitur vero Theor. 7.

17. Conuerſa ratio eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ſuperat conſequens.

Vt vbi dixiſti, ſicut 12, & 4 (hoc eſt 16) ad 4, ita 6 & 2 (hoc eſt 8) ad 2. ſi inferas. Ergo conuertendo vt 16 ad 12, ita 8 ad 6. ſtabilitur vero Theor. 9.

18. Æqua ratio eſt ſumptio extremorum

morum per ſubductionem medio-rum.

Vt vbi dixiſti, ſicut 16 ad 8, ita 12 ad 6; & vt 8 ad 4, ita 6 ad 3, ſi inferas. Ergo æquando vt 16 ad 4, ita 12 ad 3. Stabilitur vero Theor. 11.

16. 8. 4. 12. 6. 3.

AXIOMATA.

1. AEquales magnitudines ad eandem habent eandem rationem, & eadem ad æquales.

A 2. B 3. C 2. vt A ad B, ita C ad B. Et vt B ad A ita B ad C. Et vero cum A ad B talem habeat rationem quod illud certa portione contineat, habebit quoque C eandem rationem ad B quod illud eadem ſiue æquali portione contineat.

2. Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem habet rationem, quam minor. Eadem vero ad minorem maiorem habet ra-

tionem, quam ad maiorem.

| A 2. B 4. C. 3. | C. maiorem habet rationem ad

B, quam A ad B; nempe plus continet. Item B. maiorem habet rationem ad A quam ad C. nempe plus continet.

3. Quæ ad eandem eandem habent rationem æquales ſunt inter ſe; & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ ſunt æquales.

| A 2. B 4. C 2. | vt A ad B, ita C ad idem B. A, &

C ſunt æqualia, cum contineant B æqualiter. Item vt B ad A, ita idem B ad C. A & C ſunt æqualia, cum ea B contineat æqualiter.

4. Rationem habentium ad eandem magnitudinem illa maior eſt, quæ maiorem habet rationem. Ad quam vero eadem magnitudo maiorem rationem habet, illa minor eſt.

| A 3. B 4. C 2. | Maior eſt ratio A ad B, quam C ad

idem B, ergo A magis continet B,

quam C contineat idem B. ergo & A maius eſt C. Item B maiorem habet rationem ad C, quam ad A. ergo magis continet C, quam A. ergo C minus eſt, cum plus ab eodem contineatur.

5. Quæ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

A	B.	C.	D.	E.	F.
6.	3.	4.	2.	2.	1.

Vt A ad B. ita C ad D. & vt A ad B, ita E ad F. ergo vt C ad D, ita E ad F. Nempe eadem vbique capacitas.

6. Eædem rationes ad aliam ſe habent eodem modo.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
6.	3.	4.	2.	3.	2.

Vt A ad B, ita C ad D. ergo ſi ratio A ad B eſt maior ratione E ad F, tione quoque C ad D maior erit raratio E ad F. Nempe eadem eſt capacitas reſpectu eiuſdem.

7. Si fuerint quodcunque magnitudines totidem magnitudinum æque multiplices, quotuplex eſt vna

vnius magnitudo, totuplices erunt omnes omnium.

A 1 poll.	C 6 pol.	Sit pollex A. & digitus B,
B 1 dig.	D 6 dig.	ſumanturque
E 1. pol. dig.	F 6 pol. dig.	6. pollices C. & ſex digiti D.

ſi fiat ex pollice A & digito B linea E vnius pollicis, & digiti; fiatque ex 6 pollicibus C & ſex digitis D linea F 6 pollicum, & digitorum; vt C eſt ſextupla pollicis vnius A, ita F erit ſextupla pollicis, & digiti E. Nempe ex F ſumi poterit E ſexies.

8. Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, vt ablata ablatæ, reliquum quoque reliquæ erit æque multiplex, ac tota totius.

Eſt axioma præcedens conuerſum; poſitis enim, quæ ſunt poſita, ſi à totali F auferantur ſex pollices, & à totali E tollatur pollex, reſtabunt ſex digiti, & vnus digitus.

9. Si prima ſecundæ æque fuerit multiplex, vt tertia quartæ, fuerit autem quinta æquemultiplex ſe-

cundæ, vt s[illegible] quartæ, composita ex prima, & quinta erit æque multiplex secundæ, vt composita ex tertia, & sexta est quartæ.

1.	2.	5	3.	4.	6
A	B	E	C	D	F
6.p.	1.p.	4.p.	6.d.	1.d.	4.d.

Sit A prima sextupla secundæ B & C tertia sextupla quartæ D. sit & quinta E quadrupla secundæ B, & F sexta quadrupla quartæ D. si iungantur E, & A, decem erunt pollices, & si iungantur F, & C decem erunt digiti, ac toties licebit in vno pollicem accipere, quoties in alio est digitus.

10. Si duæ magnitudines duarum magnitudinum fuerint æquemultiplices, & ablatæ aliquæ earundem fuerint æquemultiplices, etiam reliquæ erunt ipsarum æquemultiplices vel æquales.

Est præcedens axioma conuersum. Positis enim, quæ fuerunt exposita, si a linea decem pollicum

auferantur 4 pollices, & à linea 10 digitorum tollantur 4 digiti, reliqua linea erit 6 pollicum, & alia 6 digitorum, & vtraque erit æque multiplex, nempe sextupla.

PROPOSITIONES.

THEOREMA PRIMVM.

Æquemultiplicium æquemultiplices sunt simplicium æquemultiplices.

Propositio. Si prima magnitudo A sit secundæ B æquemultiplex, vt tertia C quartæ D: sumatur vero quinta E æquemultiplex primæ A, vt sexta F tertiæ C: quam multiplex erit quinta E secundæ B, tam erit sexta F quartæ D.

1	2	5	3	4	6
A.	B.	E	: C	D	F
4.p.	2.p.	8.p	6.d.	3. d.	12.d
H		I	L		M
4.p.		4.p	6.d.		6.d

Præparatio. Diuidantur E, & F in magnitudines æquales ipsi A, & C, nempe in H, I, & L, M, cumque sint æquemultiplices, tot erunt in E. æquales ipsi A, quot in F. æquales C.

Demonstratio. Cum H, & I sint æquales ipsi A, & L. M. ipsi C, quam multiplex erit A ipsius B, & C ipsius D, tam erit H, I ipsius B, & L, M ipsius D. [a] Quia igitur prima H tam est multiplex secundæ B, quam tertia L quartæ D, & quia quinta I est æquemultiplex secundæ B, ac sexta M quartæ D. [b] erit composita ex prima H, & quinta I, scilicet tota E æquemultiplex secundæ B, ac composita ex tertia L, & sexta M, hoc est tota F, quartæ D.

a 1.A.3.

b 9.A.3.

THEOREMA 2.

PRoportionalium æquemultiplices ſunt proportionales.

Propoſitio. Si prima A ad ſecundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D, etiam E, & G æquemultiplices primæ, & tertiæ eandem rationem habebunt, ad F, & H æquemultiplices ſecundæ, & quartæ.

I	E	A	B	F	L
12.	6	2	1	2	6
M	G	C	D	H	N
24.	12.	4.	2.	4.	12.

Præparatio. Sumantur I, & M æquemultiplices ipſarum E, & G, itemque L, & N æquemultiplices ipſarum F & H.

Demonſtratio. I eſt æquemultiplex

primæ A, atque M tertiæ C, a pariterque L est æquemultiplex secundæ B, ac N quartæ D. Ergo, cum sit vt A ad B, ita C ad D, b æquemultiplices illarum I, M & L, N concordant. Sunt vero eædem I & M multiplices ipsarum E & G, perinde ac L, & N ipsarum F, & H. Ergo cum concordent, c erunt illarum simplices inter se proportionales, & vt E ad F, ita G ad H.

a 1.T.3.

b 9.D.3.

c 9.D.8.

THEOREMA 3.

Vt vna antecedentium ad vnam consequentium, ita omnes ad omnes.

Propositio. Si sunt magnitudines quotcunque proportionales, vt A ad B, ita C ad D, & E ad F; sicut se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, A ad B, ita se habebunt omnes antecedentes

A C E ad omnes conſequentes B D F.

Præparatio. Sumantur antecedentium A, C, E æquemultiplices G, H, I, itemque –	G.4.	H. 6.	I.2.
	A.2.	C.3.	E. 1
	B.4.	D.6.	F. 2
	L.12.	M.18.	N.6

conſequentium æquemultiplices quæuis L, M, N.

Demonſtratio. G, H, I ſunt æque-
a 7.A.3. multiplices ipſarum A, C, E ergo a compoſita ex G H I erit æquemultiplex compoſitæ ex ACE, atque eſt vna G, vnius A. Item compoſita ex L M N erit æquemultiplex compoſitæ ex BDF, atque vna L eſt vnius B. Quare cum ponatur vt A ad B,
b 9.D.3. ita C ad D, & E ad F b multiplices illarum GHI concordabunt, cum multiplicibus aliarum LMN. Ergo ſi G multiplex A ſuperat vel æquat, vel deſerit L multiplicem B, compoſita ex G H I multiplex omnium ACE ſuperabit, aut æquabit aut deſeret compoſitam ex L M N multi-
c 9.D.3. plicem omnium BDF. Ergo c illa-

rum simplices sunt proportionales, & vt A ad B, ita omnes ACE ad omnes BDF.

THEOREMA 4.

PRoportionalium prima, & tertia concordant cum secunda, & quarta.

Propositio. Si prima A ad secundam B eandem rationem habeat, quam tertia C ad quartam D, si prima maior est tertia, secunda quoque maior erit quarta, & si prima æquat tertiam, secunda æquabit quartam, ac denique si prima minor est tertia, minor quoque erit secunda quarta.

8	4	9	3
A	B.	C.	D

Demonstratio primæ partis. Quando A maior est C, [a] maior est ratio A ad D, quam C ad D. Est vero vt C ad D, ita A ad B. Ergo [b] maior est ratio A ad D, quam A ad

a 2.A.3.

b 6.A.3.

c 2.A.3. B. Ergo c D eſt minor quam B.

Demonſtratio ſecundæ partis, quando A eſt æqualis C, Eadem

4.	2.	4.	2
A.	B.	C	D

a 1 A.3. eſt ratio a A ad D, quæ C ad D. ſed
b 6. a. 3. vt C ad D, ita A ad B. Ergo b eadem eſt ratio A ad D, quæ eiuſdem A ad
c 3.A.3. B. Ergo c B, & D ſunt æquales.

Demonſtratio tertiæ partis quando A
a 2.A.3. minor eſt C, a mi-

4	2	6	3
A	B	C	D

nor eſt ratio A ad D, quam C ad D, vt vero C ad D ita A ad B. Ergo minor eſt ratio A ad D, quam eiuſdem A ad B. ergo B minor eſt D.

THEOREMA 5.

Partes, & æquemultiplices ſunt proportionales.

Propoſitio. Si partium A, & B ſint æquemultiplices C, & D, erunt partes A, B, & æquemultiplices

C, D

C, D proportionales, eritque vt A ad B, ita C ad D.

C 9. E 3. F 3. G 3.
A 3
B 2
D 6. H 2. I 2. L 2.

Præparatio. Diuidantur æquemultiplices C & D in partes æquales ipsis A, & B. Scilicet in E, F, G, & H, I, L.

Demonstratio. Vt E ad H, ita F ad I, & G ad L. ergo [a] vt E ad H ita EFG ad HIL. vt autem E. ad H ita A ad B ergo vt A ad B ita EFG hoc est C ad HIL, siue D. a 3.T.3.

THEOREMA 6.

P*Roportionales sunt vicissim proportionales.*

Propositio. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: vt A ad B, ita C ad D, & vicissim proportionales erunt: vt A ad C, ita B ad D,

quæ est Permutata ratio.

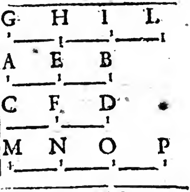
Præparatio. Sumantur primæ A, & secundæ B æquemultiplices quæuis E, & F, itemque tertiæ C, & quartæ D æquemultiplices quæuis G. & H.	E 8. A 4. B 2. F 4.
	G 18. C 6. D 3. H 9.

Demonstratio. vt A ad B ita E ad F: a 5.T.3. [a] sed vt A ad B, ita C ad D. ergo [b] vt
b 6.A.3. C ad D ita E ad F. Rursum vt C ad D, ita G ad H. c 5.T.3. [c] ergo vt E ad F, ita G ad H. ergo [d] E, & G concordant d 4.T.3. cum F, & H. Ergo si sumatur A prima, & C secunda, itemque B tertia, & D quarta; E, & F erunt æquemultiplices primæ, & tertiæ, vti G, & H secundæ, & quartæ, ac concordabunt multiplices primæ, & secundæ cum multiplicibus tertiæ, & quartæ, ergo [e] & simplices erunt e 9.D.3. proportionales, eritque vt A ad C, ita B ad D.

THEOREMA 7.

COmpositæ proportionales, etiam diuisæ sunt proportionales.

Propositio. Si compositæ magnitudines AB ex AE, EB, & CD ex CF, FD proportionales fuerint, vt AB ad BE, ita CD ad DF, hæquoque diuisæ proportionales erunt: vt AE ad EB, ita CF ad FD. quæ est diuisa ratio.



Præparatio. Sumantur ipsarum AE, & EB æquemultiplices quæuis GH. HI, itemque ipsarum CF, FD æquemultiplices MN, NO. Item sumantur IL, & OP æquemulti-

plices ipſarum EB, FD.

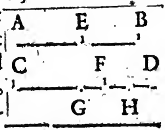
Demonſtratio. GH, HI ſunt æquemultiplices ipſarum AE, EB. ergo
a 7.A.3. [a] quammultiplex eſt GH ipſius AE, tam multiplex eſt tota GI totius AB. Eodem modo quam multiplex eſt MN ipſius CF, tam eſt tota MO totius CD. Rurſum, cum prima HI ſit æquemultiplex ſecundæ BE, vt eſt tertia NO quartæ DF; ſitque præterea quinta IL ſecundæ BE æquemultiplex, vt ſexta OP quartæ DF,
b 9.A.3. erit [b] tota HL æquemultiplex ipſius BE, vt eſt tota NP ipſius DF, adeo vt GI, MO ſint æquemultiplices ipſarum AB, CD, ſintque etiam HL, NP ipſarum BE, DF. Quare cum ſupponatur vt, AB ad BE, ita
c 9.D.3. CD ad DF, [c] multiplices illarum GI, HL concordant cum MO, NP. ergo ablatis communibus HI, NO
d 3 A.1. etiam [d] concordabunt GH, IL cum MN, OP. ergo & illarum ſimplices ſunt proportionales, & vt AE ad EB, ita CF ad FD.

THEOREMA 8.

***D**iuisæ magnitudines proportionales, etiam compositæ sunt proportionales.*

Propositio. Si diuisæ magnitudines AE,EB & CF, FD sint proportionales, vt AE ad EB, ita CF ad FD, hæ quoque compositæ proportionales erunt. Vt AB ad BE, ita CD ad DF.

Præparatio Si vt AB ad BE non est CD ad DF, sit ad DG maiorem, vel ad DH minorem ipsa DF.



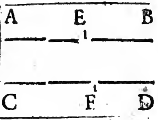
Demonstratio. Si vt AB ad BE ita CD ad DH minorem, erit diuidendo vt AE ad EB, ita CH ad HD. Sed vt AE ad EB ponitur esse CF ad FD. ergo vt CH ad HD, ita CF ad FD. ergo a cum prima CF sit minor ter- a 4. T. 3.

tia CH, erit ſecũda FD minor quarta HD contra hypoth. Si vero vt AB ad BE, ita CD ad DG maiorẽ, erit diuidendo vt AE ad EB, ita CG ad GD, ſed vt AE ad FB, ita ponitur CF ad FD. ergo vt CG ad GD, ita CF ad FD ergo cum prima CG ſit minor tertia CF, erit ſecunda GD minor quarta FD, contra hypotheſim. Ergo cum CD non ſit ad maiorem, nec ad minorem ipſa FD, erit ad ipſam.

THEOREMA 9.

SI tota, & ablata proportionia ſunt, etiam reliqua, & tota.

Propoſitio. Si fuerit vt totum AB ad totum CD, ita ablatum AE ad ablatum DF; erit & reliquum EB ad reliquum FD vt totum AB ad totum CD.



Demonstratio. Vt AB ad CD, ita AE ad CF. ergo perumtando vt AB ad AE ita CD ad CF. ergo diuidendo vt BE ad EA, ita DF ad FC. ergo permutando vt BE ad DF ita EA ad FC. Sed vt AE ad CF, ita AB ad CD. ergo vt ablatum BE ad ablatum DF ita totum AB ad totum CD.

THEOREMA 10.

Proportionalium ex æquo prima, & tertia concordant cum quarta, & sexta.

Propositio. Si sint tres magnitudines ABE, & aliæ ipsis æquales numero CDF, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur. Vt A ad B, ita C ad D, & vt B ad E, ita D ad F, ex æquo concordabunt prima A, &

tertia E cum quarta C, & ſexta F.

Demonſtratio.

1	2	3		4	5	6
A	B	E	:	C	D	F
8.	4.	2		12.	6.	3

Quando A ſuperat E. A eſt maior quam E. a 2.A.3. ergo a ratio A ad B maior eſt ratione E ad eandem B. eſt autem vt A ad B, ita C ad D. ergo maior erit ratio C ad D, quam E ad B. eſt autem vt E ad B, ita F ad D per conuerſam ra- b 4.A.3. tionem. ergo b maior erit ratio C ad D, quam F ad eandem D. ergo C maior erit quam F.

Demonſtratio.

1	2	3		4	5	6
A	B	E	:	C	D	F
8.	4.	8.		12.	6	12

Quando A eſt æqualis E. A eſt æqualis E, ergo a 2.A.3. a vt A ad B, ita E ad eandem B. ſed vt A ad B, ita C ad D. ergo vt C ad D ita E ad B. Eſt vero vt E ad B, ita F ad D. ergo vt C ad D, ita F ad b 3.A.3. eandem D. ergo b C, & F ſunt æquales.

Demonſtratio.

A	B	E	:	C	D	F
8.	4.	12		6.	3.	9.

Quando A eſt minor E. A eſt

minor E. ergo [a] minor est ratio A ad B quam E ad eandem B. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo minor est ratio C ad D, quam E ad B. vt vero E ad B, ita F ad D. ergo minor est ratio C ad D, quam F ad eandem D. ergo [b] C minor est, quam F. a 1.A.3. b 4.A.3.

Ergo semper prima, & tertia concordant cum quarta, & sexta.

THEOREMA II.

B*ina proportionales sunt ex æquo proportionales.*

Propositio. Si sint quotcunque magnitudines A B E, & aliæ ipsis æquales numero C D F, quæ binæ in eadem ratione sumantur. Vt A ad B, ita C ad D. Et vt B ad E ita D ad F, erit etiam æquando vt A ad E, ita C ad F.

Præparatio. Sumantur ipsarum

A, & C æquemultiplices G. L. Item ipsarum B, D, æquemultiplices H, M, denique I, N ipsarum E, F.

8.	4.	12		6.	3.	9
A	B	E	:	C	D	F
G	H	I	:	L.	M.	N.
16.	12.	24		12.	9.	18.

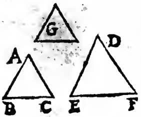
Demonstratio. Vt A ad B, ita C ad
a 2.A.3. D. ergo a vt G ad H, ita L ad M.
Rursum vt B ad E, ita D ad F. ergo
b 10.T.3. vt H ad I, ita M ad N. ergo b G, & I
concordant cum L, & M. ergo & illarum simplices siue partes sunt proportionales, & vt A ad E, ita C ad F.

GEOMETRIÆ SPECVLATIVÆ

LIBER QVARTVS.

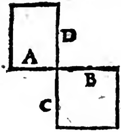
DEFINITIONES.

I. Similes figuræ rectilineæ sunt illæ, quæ angulos singulos singulis æquales habent, & latera circa æquales angulos proportionalia.



Talia sunt triangula ABC, DEF, angulus A æqualis D, & vt AB ad AC, ita DE ad DF, &c.

2. Reciprocæ figuræ ſunt, cum in vtraque figura antecedentes, & conſequentes rationum termini fuerint.



Talia ſunt parallelogramma A, & B ſi ſit vt latus A ad latus B; ita latus C ad latus D.

3. Altitudo cuiuſque figuræ eſt lineà perpendicularis à vertice ad baſim ducta, atque omnino triangula poſita inter eaſdem parallelas eandem habent altitudinem, ſicut & illa, quæ apices habent ſimul, & baſes in vna recta linea, vt ſequenti in figura.

DEFI-

Libro tertio pa

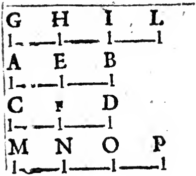
Pag. 75. lin. 9. Maior *pro* M

pag. 87. lin. 20. tione *pro* ra

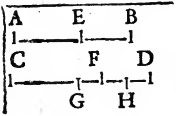
ratio *pro* tione

pag. 95. 8. 4. 9. 3. *pro* 8. 4. 6. 3.

pag. 99.



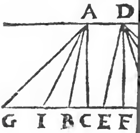
pag. 101.

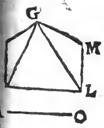


pag. 102. linea antepen. DF *pr*

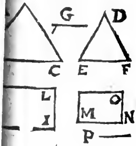
pag. 106. linea proantepen. M

pag.110

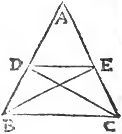




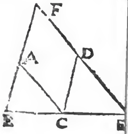
pag.131.



pag.112.



pag.114.
lin.5. ergo *pro* ve

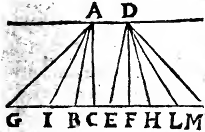


PROPOSITIONES.

THEOREMA PRIMVM.

Triangula, & parallelogramma eiusdem altitudinis ita se habent vt bases.

Propositio. Triangula ABC, DEF, quorum eadem fuerit altitudo, siue quæ sint inter easdem parallelas AD, BF, ita se habent vt bases. Vt prima magnitudo BC ad secundam EF, ita tertia ABC ad quartam DEF.



Præparatio. Sumantur BI, IG ęquales ipsi BC: itemq; FH, HL, LM æquales ipsi EF, fiantque triangula ductis rectis

K

AI, AG, & DH, DL, DM, adeo vt triangula AGI, AIB, ABC ob æqualitatem baſium [a] ſint æqualia, nec
a 23.T.3.
non alia inter ſe DEF, DFH, DHL, DLM. atque eo pacto, vt tota GB eſt multiplex baſis BC, ita triangulum AGB eſt æque multiplex trianguli ABC, hoc eſt primæ, & tertiæ magnitudinis: item baſis FM, & triangulum DFM ſunt æque multiplices ſecundæ magnitudinis EF, & quartæ DEF.

Demonſtratio. Si baſis GB æqualis eſt baſi FM, eſt etiam triangulum AGB æquale triangulo DFM. [b] Et
b 23 T.1.
ſi baſis GB eſt minor FM, minus quoque eſt AGB ipſo DFM. ac denique ſi GB maior eſt baſi FM, maius quoque eſt AGB ipſo DFM. ergo [c] duæ baſes GB, FM concordant cum triangulis AGB, DFM.
c 10.D.3.
ergo [d] & illarum ſimplices ſunt proportionales, & vt BC ad EF, ita ABC ad DEF.
d 9.D.3.

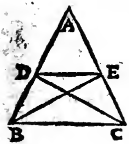
Quia vero parallelogramma ſemper erunt dupla triangulorum,

c habebunt se eodem modo, ac recurret eadem demonstratio. c 25. T. 1.

THEOREMA 2.

Parallela lateri trianguli secat latera proportionaliter.

Propositio. Si ad vnum trianguli



ABC latus BC parallela ducta fuerit DE, hæc proportionaliter secabit latera AB, AC, eritque vt AD ad DB, ita AE ad EC.

Præparatio. Ducantur rectæ DC, EB.

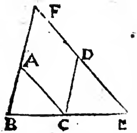
Demonstratio. Duo triangula DEB, EDC sunt super eadem basi DE, & inter easdem parallelas DE, BC. ergo [a] & inter se æqualia. ergo vt b ADE ad DEB, ita idem ADE ad a 1. T. 4. b. 1. A. 3.

EDC. vt autem ADE ad DEB ita
a 1.T.3. baſis AD ad baſim DB. c ergo vt
ADE ad EDC ita AD ad DB. Vt
vero ADE ad EDC ita AE ad EC.
ergo vt AD ad DB, ita AE ad EC.

THEOREMA 3.

AEqui-angulorum triangulorum proportionalia ſunt latera.

Propoſitio. Æquiangulorum triangulorum ABC, DCE ita vt A ſit æqualis D, & B ipſi C, & C ipſi E, proportionalia ſunt latera, quæ circa æquales angulos vt AB ad BC, ita DC ad CE &c.



Præparatio. Statuantur baſes BC, & CE ſuper eadem recta BE, adeo

vt angulus B opponatur æquali sibi DCE, itemque ACB æquali E. Et quia Anguli DCE, & E sunt ambo simul minores duobus rectis, [a] estque B æqualis ipsi DCE, erunt duo ABC, DEC minores duobus rectis, adeoque productæ rectæ BA, ED tandem concurrent in F, fietque triangulum FBE. Et quia in rectas FE, & AC cadit recta BCE faciens duos oppositos ad easdem partes internum DEC, & externum ACB inter se æquales, erunt [b] inter se parallelæ rectæ FE AC. Rursum quia in rectas FB, DC cadit recta ECB faciens oppositos internum ABC, & externum DCE æquales inter se, erunt quoque rectæ FB, DC inter se parallelæ, eritque ex definitione parallelogrammi, FACD parallelogrammum.

a 17. T. 1.

b 13. T. 1.

Demonstratio. In triangulo FBE linea AC est parallela lateri FE. Ergo [c] vt BA ad AF, ita BC ad CE. ergo permutando vt BA ad BC, ita AF ad CE, est autem CD æqualis AF. [d]

c 2. T. 4.

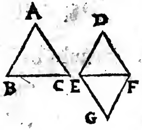
d 21. T. 1.

ergo vt AB ad BC, ita DC ad CE. Iterum quia DC eſt parallela lateri FB, erit vt EC ad CB, ita ED ad DF. vero permutando vt EC ad ED, ita CB ad DF. Eſt ergo CA æqualis DF. ergo vt EC ad ED, ita CB ad CA. Tandem vt AB ad BC, ita DC ad CE, & vt BC ad CA, ita CE ad ED. ergo æquando vt AB ad AC, ita DC ad DE.

THEOREMA 4.

Triangula proportionalium laterum ſunt æqui-angula.

Propoſitio. Si duo triangula ABC, DEF habeant latera proportionalia, vt AB ad AC, ita DE ad DF, &c. æquiangula erunt triãgula, & habebunt



æquales oppoſitos proportionali-

bus lateribus angulos A ipsi D, &c.

Præparatio. Fiat angulus EFG æqualis angulo C, & FEG angulo B, eritque [a] reliquus G æqualis reliquo A, eruntque triangula ABC, EFG æquiangula. a 18.T.1.

Demonstratio. Vt AB ad BC, ita GE ad EF. [b] vt autem AB ad BC, ita DE ad EF. ergo vt GE ad EF, ita DE ad eandem EF, ergo [c] GE & DE sunt æquales. Pari modo ostendetur GF æqualis ipsi DF. quare cum duo latera GE, GF sint æqualia duobus DE, DF, & basis EF sit communis, [d] erit triangulum DEF æquale triangulo GEF, & æquiangulum. Est autem eidem GEF æquiangulum ABC. ergo & triangulum DEF est æquiangulum triangulo ABC.

b 3.T.4.
c 1.A.3.
d 11.T.1.

THEOREMA 5.

Ex æquali angulo, & lateribus illius proportionalibus æquiangula triangula.

Figura Theor. praeced. *Propoſitio.* Si duo triangula ABC, DEF vnum angulum ABC vni angulo DEF æqualem habeant, & circum angulos proportionalia latera, vt AB ad BC, ita DE ad EF, æquiangula erunt triangula.

Præparatio. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B, & EFG ipſi C. a 18.T.1. eritque G æqualis A,[a] atque adeo æquiangula ABC, GEF.

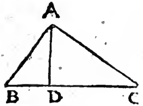
Demonſtratio. Vt AB ad BC, ita b 3.T.4. GE ad EF. b vt vero AB ad BC, ita DE ad EF. Ergo vt GE ad EF ita c 1.A.3. DE ad eandem EF. ergo[c] GE, & DE ſunt æquales. Atque adeo in triangulis DEF, GEF duo latera DE, EF ſunt æqualia duobus GE,

EF, est & angulus GEF æqualis angulo B, hoc est, vt supponitur, angulo DEF. ergo d duo triangula DEF, GEF sunt æquiangula. sunt autem & duo ABC, GEF æquiangula, ergo & duo ABC, DEF sunt æquiangula. d1, T. 1.

THEOREMA 6.

IN rectangulis triangulis perpendicularis à recto in basim facit triangula inter se, & toti similia.

Propositio. Si in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto A in basim BC perpendicularis AD ducatur, quæ fient triangula ABD, ADC erunt tum toti triangulo ABC, tum inter se similia.

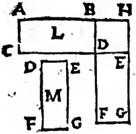


Demonſtratio. In triangulis A B C, & D A B, duo anguli B A C rectus, & ABC ſunt æquales duobus ADB
a 18.T.1. recto, & eidem D B A. ergo a & tertius ACB eſt æqualis tertio DAB. ergo æqui angula ſunt triangula
b 3.T.4. A B C, D A B ergo b proportionalia
c 1.D.4. habent latera. ergo c ſunt ſimilia. Eodem modo demonſtratur A D C ſimile ipſi ABC, atque adeo, cum A D B, A D C habeant æquales angulos toti A B C, ſunt æqui-angula, & ſimilia.

THEOREMA 7.

ÆQualium, & æquiangulorum parallelogrammorũ reciproca ſunt latera, & contra.

Propoſitio. Æqualium parallelo-



grammorũ L, M, & vnum angulum B D C vni angulo E D F æqualem habentiũ reciproca sunt latera, quę circa æquales angulos, vt E D ad D E, ita F D, ad D B, contra vero si parallelogrammorum A D, D G vnum angulum B D C vni E D F æqualem habentium reciproca sunt latera circa æquales angulos. Vt C D ad D E, ita F D ad D B, æqualia sunt parallelogramma A D, D G.

Præparatio. Producãtur latera C D in E, & B D in F, fiatque parallelogrammum D G æqui-angulum, & æquale alteri M, deinde producantur G E, & A B in H, vt fiat parallelogrammum commune D H, sintque D A, D H in eadem altitudine, siue inter easdem parallelas, vti & duo D H & D G.

Demonstratio. Duo parallelogramma C B, D H sunt in eadem altitu-

a 1.T.4. dine. ergo [a] vt C D ad D E, ita parallelogrammum C B ad D H. Eſt b 1.T.4. autem vt C B ad D H, ita æquale F E ad idem D H [b]. ergo vt C D ad D E ita parall. F E ad D H. ſed vt F E ad DH, ita F D ad DB. ergo vt C D ad D E, ita F D ad D B.

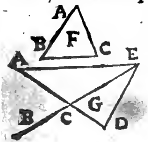
Ex aduerſo vero ſi ſint latera circa æquales angulos BDC, EDF recip roca, vt CD ad DE, ita FD ad DB erunt parallelogramma C B, DG æqualia: eadem enim in Præparatione, vt CD ad DE ita parall. CB ad DH. Et vt FD ad DB, ita paral. FE ad DH. Eſt vero vt CD ad DE ita F D ad DB. ergo vt CB ad DH, ita FE ad idem DH. ergo c æqualia ſunt CB, FE.

c 3.T.3.

THEOR.

THEOREMA 8.

Triangulorum æqualium, & habentium æqualem angulum reciproca ſunt latera, & contra.



Propoſitio. Æqualium triangulorum F, G, & habentium æqualẽ angulum vnum ACB vni ECD eciproca ſunt latera, quæ circa æquales angulos vt BC ad CE, ita DC ad CA, & contra.

Præparatio. Productis vt ſupra lateribus DC in A, & EC in B fiat triangulum ABC, ſumptis lateribus CB, CA æqualibus aliis CB, CA, & ducta BA, vt triangulum ABC ſit æquale, & ſimile ipſi F. Ducatur deinde recta AE, vt fiat commu-

ne triangulum ACE.

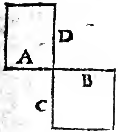
a 1.T.4. *Demonſtratio.* Vt BC ad CE, a ita ABC ad ACE, eſt autem vt ABC ad ACE, ita æquale CDE ad idem ACE. ergo vt BC ad CE, ita DCE ad ACE. Eſt autem vt DCE ad CEA
b 1.T.4. ita DC ad CA. b ergo vt BC ad CE, ita DC ad CA.

Ex aduerſo vero ſi latera ſint reciproca circa æquales angulos vt BC ad CE, ita DC ad CA, erunt ipſa triangula æqualia. Eadem enim in Præparatione, vt BC ad CE, ita DC ad CA. vt vero BC ad CE, ita
c 1.T.4. ABC ad ACE. c Et vt DC ad CA ita DCE ad CEA. ergo vt ABC ad CEA, ita DCE ad idem CEA. ergo
d 3.A.s. d ABC, & CDE ſunt æqualia.

THEOREMA 9.

REctangulum ſub extremis proportionalium æquale eſt illi, quod ſub mediis.

Propoſitio. Si quatuor lineæ pro-



portionales fuerint, vt A ad B ita C ad D, quod sub extremis A, & D comprehenditur rectangulum AD æquale est ei, quod sub mediis B, C comprehenditur BC, & contra.

Præparatio. Fiant ex dictis lineis parallelogramma rectangula, adeoque æquiangula AD, CB, & disponantur vt supra.

Demonstratio. Parallelogramma AD, CB habent æquales angulos, & circa illos reciproca latera vt A ad B, ita C ad D. ergo [a] sunt æqualia. a 7. T. 4.

Ex aduerso vero si sub extremis A, & D comprehensum rectangulum AD, æquale fuerit rectangulo CB comprehenso sub mediis, quatuor illæ rectæ A B, C, D, erunt proportionales vt A ad B, ita, C ad D.

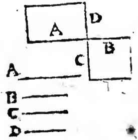
Eadem enim in præparatione parallelogramma AD, CB ponuntur æqualia, habentque rectos, adeo-

b 7.T.4. que æquales angulos: ergo [b] illorum latera ſunt reciproca, & vt A ad B, ita C ad D.

THEOREMA 10.

Rectangulum ſub media triũ proportionalium æquale eſt illi, quod ſub extremis, & contra.

Propoſitio. Si tres rectæ A, B, D proportionales fuerint vt A ad B, ita B ad D, quod ſub extremis A, & D fiet rectangulum A D, æquale erit ei, quod à media B fiet BC. Contra vero ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale eſt quadrato mediæ, proportionales ſunt illæ tres rectæ.



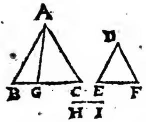
Demonſtratio. Tribus illis rectis inſeratur C æqualis ipſi B, vt ſit ſicut

A ad B, ita C ad D, ac tunc recurret superior demonstratio positis illis quatuor proportionalibus, eritque rectangulum BC sub æqualibus B, C comprehensum Quadratum mediæ B.

THEOREMA II.

Similia triangula sunt in duplicata ratione laterum proportionalium.

Propositio. Similia triangula ABC, DEF sunt in duplicata ratione laterum proportionalium BC, EF. hoc est, si latera sumantur proportionalia BC, EF, & quæratur tertia aliqua proportionalis, adeo vt sit sicut BC ad EF, ita EF ad tertiam HI, triangulum



ABC factum ſupra primam BC erit ad triangulum DEF factum ſimiliter ſupra ſecundam EF, ſicut ſe habet prima BC ad tertiam HI.

Præparatio. Si latus BC eſt maius EF reſcindatur ex eo recta BG æqualis tertiæ HI, ducaturque AG, adeo vt duo fiant triangula ABG, AGC eiuſdem altitudinis.

Demonſtratio. Quia ponuntur ſimilia triangula, erit vt AB ad BC,
a 3. T.4. ita DE ad EF. a ergo permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF. Vt autem BC ad EF, ita ponitur EF ad BG. ergo duo ABG; DEF reciproca habent latera AB ad DE, & EF ad BG, & æquales angulos iis contentos B,
b 8.T.4. E. ergo b ſunt æqualia. Ergo vt ABC ad DEF, ita idem ABC ad ABG æquale ipſi DEF. Vt autem ABC ad
c 1.T.4. ABG, ita BC ad BG. c ergo vt ABC ad DEF, ita BC ad BH, ſiue ad illi æqualem HI, quæ tertia eſt proportionalis.

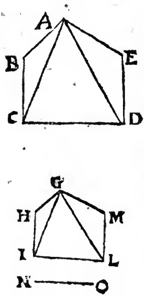
Quod ſi BC, & EF ponantur æqualia, æqualia quoque erunt

Triangula, adeoque in ratione postulata.

THEOREMA 12.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona habent inter se duplicatam rationem eius, quam habet latus homologum ad homologum.

Propositio. Sint polygona similia ABCDE, & GHILM. hoc est habeant æquales angulos, & circa illos proportionalia latera, 1. diuidentur in triangula similia, vt ABC sit simile GHI &c, eruntque tot in vno, quot in alio. 2. Triangula illa erunt homo-



loga ſine proportionalia totis polygonis; Vt triangulum ABC ad GHI, ita polygonum ABCDE ad GHILM. 3. Polygona interſe habebunt duplicatam rationem laterum proportionalium, hoc eſt ſi ſit vt CD ad IL, ita IL ad tertium proportionale NO, erit vt CD ad NO, ita ABCDE ad GHILM, quæ eſt duplicata ratio.

Præparatio. ducantur ab vno angulo rectæ AC, AD, & GI, GL.

Demonſtratio primæ partis. Quia tot ſunt anguli in vno, quot in alio, tot erunt triangula in vno, quot in alio. Quia vero in triangulis ABC, GHI angulus B eſt æqualis H, & latera BA, BC proportionalia ipſis GH,
a 5.T.4. HI, triangula erunt ſimilia. a Idem vero oſtendetur de triangulis AED, GML. Rurſum vt AC ad CB, ita GI ad IH ob ſimilia triangula, & vt BC ad CD, ita ob ſimilia polygona HI ad IL. ergo æquando vt AC ad CD, ita GI ad IL. Eſt vero angulus BCD æqualis HIL. ergo ablato

æquali hinc ACB, inde GIH restabunt æquales duo ACD, GIL, adeoque triangula duo ACD, GIL habent angulum æqualem, & latera circa illum proportionalia. ergo[b] & sunt similia. b 5. T. 4.

Demonstratio secundæ partis. Quia similia sunt triangula ABC, GHI habebunt c duplicatam rationem laterum AC, GI. Sunt autem & similia ACD, GIL. ergo & habebunt duplicatam rationem eorundem laterum AC, GI. ergo erit vt ABC ad GHI, ita ACD ad GIL. Rursum vero AED, GML sunt similia. ergo habent, duplicatam rationem laterum homologorum AD, GL. Habent autem ACD, GIL duplicatam quoque rationem laterum eorumdem AD, GL. Ergo vt AED ad GML, ita ACD ad GIL, & vt ACD ad GIL, ita ABC ad GHI. ergo[d] vt vnum antecedentium AED, ad vnum consequentium GML, ita omnia antecedentia hoc est polygonum ABCDE, ad omnia conse- c 11. T. 4. d 3. T. 3.

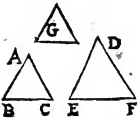
quentia, siue polygonum GHILM.

Demonstratio tertiæ partis. Vt triangulũ vnum quoduis ACD ad aliud proportionatum GIL, ita polygonum totum ad totum. Est autem triangulum ACD ad GIL in duplicata ratione lateris CD ad IL. ergo & totum polygonum ABCDE erit ad GHILM in duplicata ratione laterum CD, IL.

THEOREMA 13.

Eidem rectilineo similia sunt inter se similia.

Propositio. Si ABC est simile G, & eidem G est simile DEF, est quoque ABC simile DEF.

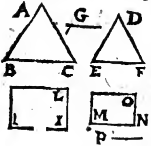


Demonstratio. Anguli polygoni ABC sunt æquales

angulis polygoni G, ſunt & æquales anguli polygoni DEF angulis eiuſdem G, ergo & interſe æquales. Rurſum latera angulorum polygoni ABC, & DEF ſunt proportionalia lateribus angulorum polygoni G. ergo & interſe proportionalia. ergo & polygona ſimilia.

THEOREMA 14.

Ex quatuor proportionalibus facta ſimilia polygona ſunt quoque proportionalia.



Propoſitio. Si quatuor-lineæ BC, EF, HI, MN ſint proportionales vt BC ad EF, ita HI ad MN, & ab iis recti-linea ſimilia, ſimiliterque poſita deſcribantur ABC, DEF, & HL, MO quæuis

dum ſimilia, illa proportionalia erunt vt ABC ad DEF, ita HL ad MO.

Præparatio. Reperiatur tertia proportionalis G vt ſit ſicut BC ad EF ita EF ad G, ſitque adeo BC ad G duplicata eius quæ eſt BC ad EF. Reperiatur ſimiliter tertia P.

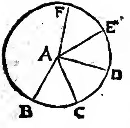
Demonſtratio. Vt BC ad EF, ita HI ad MN, & vt EF ad G, ita MN ad P. ergo æquando vt BC ad G, ita HI ad P. Vt autem BC ad G, ita ABC ad DEF. a ergo vt ABC ad DEF ita HI ad P. Vt autem HI ad P, ita AL ad MO. ergo vt ABC ad DEF, ita HL ad MO.

a 11.T.4.

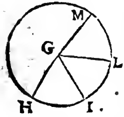
THEOREMA 15.

In circulis æqualibus anguli ſunt proportionales circumferentiis.

Propoſitio. In circulis æqualibus ex



ex centio A, & G anguli B A C, HGI eandem habent rationem cũ peripheriis, quibus insistunt BC, HI, vt sit sicut BAC ad HGI, ita BC ad HI.



Præparatio. Sumantur circumferentiæ CD, DE, æquales ipsi BC, similiterque I L, L M æquales ipsi HI, ducanturque radij AD, AE, AF, & G L, GM, adeo vt anguli CAD, DAE, EAF sint æquales interse, sicut & IGL, LGM interse. Quo pacto vt circumferentia CF erit multiplex ipsius BC, ita angulus CAF erit æquemultiplex anguli BAC, hoc est primæ, & tertiæ magnitudinis: similiterque IM erit multiplex ipsius HI, & angulus IGM æquemultiplex anguli HGI, hoc est secundæ, & quartæ magnitudinis.

Demonſtratio. Si peripheria CF æqualis eſt peripheriæ IM, etiam angulus CAF æqualis eſt angulo IGM: ac ſi CF maior eſt quam IM, maior quoque eſt CAE ipſo IGM: ſi denique CF minor eſt quam IM, minor quoque eſt CAF ipſo IGM, ergo duæ circumferentiæ CF, IM concordant cum angulo CAF, IGM, ergo ſimplices illarum ſunt proportionales, & vt BC ad HI, ita BAC ad HGI.

ELEMENTA GEOMETRIÆ PRACTICÆ.

POSTVLATA.

1. A Quouis puncto ad quoduis punctum liceat lineam rectam ducere.
2. Lineam rectam terminatam liceat in continuum rectâ producere.
3. Quouis centro, & quouis interuallo liceat circulum describere.
4. Cuiuis datæ lineæ rectæ liceat aliam rectam æqualem sumere.

ne triangulum ACE.

a 1.T.4. *Demonſtratio*. Vt EC ad CE, a ita ABC ad ACE, eſt autem vt ABC ad ACE, ita æquale CDE ad idem ACE. ergo vt BC ad CE, ita DCE ad ACE. Eſt autem vt DCE ad CEA

b 1.T.4. ita DC ad CA. b ergo vt BC ad CE, ita DC ad CA.

Ex aduerſo vero ſi latera ſint reciproca circa æquales angulos vt BC ad CE, ita DC ad CA, erunt ipſa triangula æqualia. Eadem enim in Præparatione, vt BC ad CE; ita DC ad CA. vt vero BC ad CE, ita

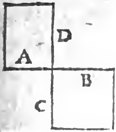
c 1.T.4. ABC ad ACE. c Et vt DC ad CA ita DCE ad CEA. ergo vt ABC ad CEA, ita DCE ad idem CEA. ergo

d 3.A.5. d ABC, & CDE ſunt æqualia.

THEOREMA 9.

REctangulum ſub extremis proportionalium æquale eſt illi, quod ſub mediis.

Propoſitio. Si quatuor lineæ pro-



portionales fuerint, vt A ad B ita C ad D, quod ſub extremis A, & D comprehenditur rectangulum AD æquale eſt ei, quod ſub mediis B, C comprehenditur BC, & contra.

Præparatio. Fiant ex dictis lineis parallelogramma rectangula, adeoque æquiangula AD, CB, & diſponantur vt ſupra.

Demonſtratio. Parallelogramma AD, CB habent æquales angulos, & circa illos reciproca latera vt A ad B, ita C ad D. ergo a ſunt æqualia. a 7. T. 4.

Ex aduerſo vero ſi ſub extremis A, & D comprehenſum rectangulum AD, æquale fuerit rectangulo CB comprehenſo ſub mediis, quatuor illæ rectæ A B, C, D, erunt proportionales vt A ad B, ita, C ad D.

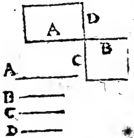
Eadem enim in præparatione parallelogramma AD, CB ponuntur æqualia, habentque rectos, adeo-

b 7.T.4. que æquales angulos: ergo [b] illorum latera ſunt reciproca, & vt A ad B, ita C ad D.

THEOREMA 10.

Rectangulum ſub media triũ proportionalium æquale eſt illi, quod ſub extremis, & contra.

Propoſitio. Si tres rectæ A, B, D proportionales fuerint vt A ad B, ita B ad D, quod ſub extremis A, & D fiet rectangulum A D, æquale erit ei, quod à media B fiet BC. Contra vero ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale eſt quadrato mediæ, proportionales ſunt illæ tres rectæ.



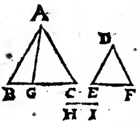
Demonſtratio. Tribus illis rectis inſeratur C æqualis ipſi B, vt ſit ſicut

A ad B, ita C ad D, ac tunc recurret superior demonstratio positis illis quatuor proportionalibus, eritque rectangulum BC sub æqualibus B, C comprehensum Quadratum mediæ B.

THEOREMA II.

Similia triangula sunt in duplicata ratione laterum proportionalium.

Propositio. Similia triangula ABC, DEF sunt in duplicata ratione laterum proportionalium BC, EF. hoc est, si latera sumantur proportionalia BC, EF,



& quæratur tertia aliqua proportionalis, adeo vt sit sicut BC ad EF, ita EF ad tertiam HI, triangulum

ABC factum supra primam BC erit ad triangulum DEF factum similiter supra secundam EF, sicut se habet prima BC ad tertiam HI.

Præparatio. Si latus BC est maius EF rescindatur ex eo recta BG æqualis tertiæ HI, ducaturque AG, adeo vt duo fiant triangula ABG, AGC eiusdem altitudinis.

Demonstratio. Quia ponuntur similia triangula, erit vt AB ad BC,
a 3. T.4. ita DE ad EF. a ergo permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF. Vt autem BC ad EF, ita ponitur EF ad BG. ergo duo ABG, DEF reciproca habent latera AB ad DE, & EF ad BG, & æquales angulos iis contentos B,
b 8.T.4. E. ergo b sunt æqualia. Ergo vt ABC ad DEF, ita idem ABC ad ABG æquale ipsi DEF. Vt autem ABC ad
c 1.T.4. ABG, ita BC ad BG. c ergo vt ABC ad DEF, ita BC ad BH, siue ad illi æqualem HI, quæ tertia est proportionalis.

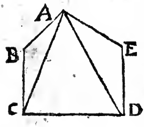
Quod si BC, & EF ponantur æqualia, æqualia quoque erunt

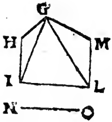
Triangula, adeoque in ratione postulata.

THEOREMA 12.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur & numero æqualia, & homologa totis; Et polygona habent inter se duplicatam rationem eius, quam habet latus homologum ad homologum.

Propositio. Sint polygona similia ABCDE, & GHILM. hoc est habeant ęquales angulos, & circa illos proportionalia latera, 1. diuidentur in triangula similia, vt ABC sit simile GHI &c, eruntque tot in vno, quot in alio. 2. Triangula illa erunt homo-





loga siue proportionalia totis polygonis; Vt triangulum ABC ad GHI, ita polygonum ABCDE ad GHILM. 3. Polygona inter se habebunt duplicatam rationem laterum proportionalium, hoc est si sit vt CD ad IL, ita IL ad tertium proportionale NO, erit vt CD ad NO, ita ABCDE ad GHILM, quæ est duplicata ratio.

Præparatio. ducantur ab vno angulo rectæ AC, AD, & GI, GL.

Demonstratio primæ partis. Quia tot sunt anguli in vno, quot in alio, tot erunt triangula in vno, quot in alio. Quia vero in triangulis ABC, GHI angulus B est æqualis H, & latera BA, BC proportionalia ipsis GH,
a 5.T.4. HI, triangula erunt similia. a Idem vero ostendetur de triangulis AED, GML. Rursum vt AC ad CB, ita GI ad IH ob similia triangula, & vt BC ad CD, ita ob similia polygona HI ad IL. ergo æquando vt AC ad CD, ita GI ad IL. Est vero angulus BCD æqualis HIL. ergo ablato

æquali hinc ACB, inde GIH restabunt æquales duo ACD, GIL, adeoque triangula duo ACD, GIL habent angulum æqualem, & latera circa illum proportionalia. ergo [b] & sunt similia. b 5.T.4.

Demonstratio secundæ partis. Quia similia sunt triangula ABC, GHI habebunt [c] duplicatam rationem laterum AC, GI. Sunt autem & similia ACD, GIL. ergo & habebunt duplicatam rationem eorundem laterum AC, GI. ergo erit vt ABC ad GHI, ita ACD ad GIL. Rursum vero AED, GML sunt similia. ergo habent, duplicatam rationem laterum homologorum AD, GL. Habent autem ACD, GIL duplicatam quoque rationem laterum eorundem AD, GL. Ergo vt AED ad GML, ita ACD ad GIL, & vt ACD ad GIL, ita ABC ad GHI. ergo [d] vt vnum antecedentium AED, ad vnum consequentium GML, ita omnia antecedentia hoc est polygonum ABCDE, ad omnia conse- c 11.T.4. d 3. T.3.

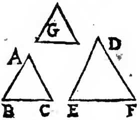
quentia, sine polygonum GHILM.

Demonstratio tertiæ partis. Vt triangulũ vnum quoduis ACD ad aliud proportionatum GIL, ita polygonum totum ad totum. Est autem triangulum ACD ad GIL in duplicata ratione lateris CD ad IL. ergo & totum polygonum ABCDE erit ad GHILM in duplicata ratione laterum CD, IL.

THEOREMA 13.

EIdem rectilineo similia sunt inter se similia.

[*Propositio.* Si ABC est simile G, & eidem G est simile DEF, est quoque ABC simile DEF.



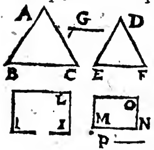
Demonstratio. Anguli polygoni ABC sunt æquales

angulis polygoni G, ſunt & æquales anguli polygoni DEF angulis eiuſdem G, ergo & interſe æquales. Rurſum latera angulorum polygoni ABC, & DEF ſunt proportionalia lateribus angulorum polygoni G. ergo & interſe proportionalia. ergo & polygona ſimilia.

THEOREMA 14.

Ex quatuor proportionalibus facta ſimilia polygona ſunt quoque proportionalia.

Propoſitio. Si quatuor lineæ BC, EF, HI, MN ſint proportionales vt BC ad EF, ita HI ad MN, & ab iis recti-linea ſimilia, ſimiliteque poſita deſcribantur ABC, DEF, & HL, MO quæuis



dum ſimilia, illa proportionalia erunt vt ABC ad DEF, ita HL ad MO.

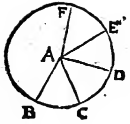
Præparatio. Reperiatur tertia proportionalis G vt ſit ſicut BC ad EF ita EF ad G, ſitque adeo BC ad G duplicata eius quæ eſt BC ad EF. Reperiatur ſimiliter tertia P.

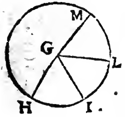
Demonſtratio. Vt BC ad EF, ita HI ad MN, & vt EF ad G, ita MN ad P. ergo æquando vt BC ad G, ita HI ad P. Vt autem BC ad G, ita ABC ad
a 11.T.4. DEF. a ergo vt ABC ad DEF ita HI ad P. Vt autem HI ad P, ita AL ad MO. ergo vt ABC ad DEF, ita HL ad MO.

THEOREMA 15.

IN circulis æqualibus anguli ſunt proportionales circumferentiis.

Propoſitio. In circulis æqualibus ex





ex centio A, & G anguli B A C, HGI eandem habent rationem cũ peripheriis, quibus insistunt BC, H I, vt sit sicut BAC ad HGI, ita BC ad HI.

Praparatio. Sumantur circumferentiæ CD, DE, æquales ipsi BC, similiterque I L, L M æquales ipsi HI, ducanturque radij AD, AE, AF, & G L, GM, adeo vt anguli CAD, DAE, EAF sint æquales inter se, sicut & IGL, LGM inter se. Quo pacto vt circumferentia CF erit multiplex ipsius BC, ita angulus CAF erit æquemultiplex anguli B A C, hoc est primæ, & tertiæ magnitudinis: similiterque IM erit multiplex ipsius HI, & angulus IGM æquemultiplex anguli HGI, hoc est secundæ, & quartæ magnitudinis.

Demonſtratio. Si peripheria CF æqualis eſt peripheriæ I M, etiam angulus C A F æqualis eſt angulo IGM: ac ſi CF maior eſt quam IM, maior quoque eſt CAF ipſo IGM: ſi denique CF minor eſt quam IM, minor quoque eſt CAF ipſo IGM, ergo duæ circumferentiæ CF, IM concordant cum angulo C A F, IGM, ergo ſimplices illarum ſunt proportionales, & vt BC ad HI, ita BAC ad HGI.

ELEMENTA GEOMETRIÆ PRACTICÆ.

POSTVLATA.

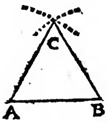
1. A Quouis puncto ad quoduis punctum liceat lineam rectam ducere.
2. Lineam rectam terminatam liceat in continuum rectâ producere.
3. Quouis centro, & quouis interuallo liceat circulum describere.
4. Cuiuis datæ lineæ rectæ liceat aliam rectam æqualem sumere.

PROPOSITIONES.

PROBLEMA PRIMVM.

T*Riangulum æquilaterum super data recta describere.*

Datur AB recta.



Postulatur triangulum æquilaterum ABC.

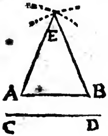
Praxis. Aperto circino interuallo AB ex A, & B arcus describo, & ex eorum communi sectione C duco rectas CA, CB.

Demonstratio. Ex natura circuli, cuius radij æquales, & ex 1. Ax. 1. AC æqualis AB. BC æqualis eidem AB. ergo AC æqualis BC.

PROBLEMA 2.

Ex datis duabus lineis aptis triangulum Isosceles constituere.

Datur AB, CD. *Post.* Isosceles AEB.



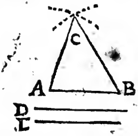
Praxis. Aperto circino interuallo CD ex A & B arcus describo, & ex sectione E duco rectas EA, EB.

Demonstratio. Ex circulo. AB sibi æqualis; EA, EB ipsi CB.

PROBLEMA 3.

Ex tribus datis lineis aptis triangulum Scalenum describere.

Datur AB, D, E rectæ. *Post.* Isos-



celes ABC.

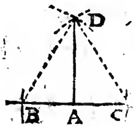
Praxis. Ex A interuallo rectæ D arcum describo versus C, itemque ex B interuallo rectæ E atque ex sectione C rectas duco CA, CB.

Demonstratio. Ex circulo. AB sibi æqualis: AC ipsi D: BC ipsi E. Aptæ vero sunt lineæ cum duæ sunt maiores tertia.

PROBLEMA 4.

A Dato in linea puncto perpendicularem educere.

Datur. Punctum A in recta BC.



Postulatur AD perpendicularis.

Praxis. Ex A quouis interuallo describo arcus B, C: tũ ex B & C quo-

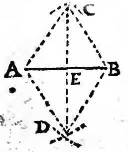
uis interuallo maiori, & commodo arcus describo, & ex illorum sectione D rectam duco DA.

Demonstratio. Ductis occultis DB, DC, AB, BD æqualia ipsis AC, CD: AD commune. ergo a anguli DAB, DAC æquales. a 11.T.1.

PROBLEMA 5.

R*Ectam finitam secare bifariam.*

Datur. AB. *Post.* æquales EA, EB.



Praxis. Ex A, & & B arcus describo ad libitum supra & infra, & per eorum sectiones D, C duco occultam DC, quæ AB secat in E.

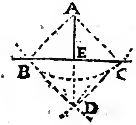
Demonstratio. AC, AD æqualia BC, BD: commune CD. ergo a an- a 11.T.1.

gulus ACE æqualis BCE,& AC,CE
b 1.T.1. æq. BC,CE. ergo [b] & AE ipsi EB.

PROBLEMA 6.

Ex dato extra-lineam puncti perpendicularem adducere.

Datur. Punctum A, recta BC.



Postulatur. Perpendicularis AE.

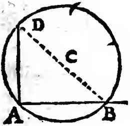
Praxis. Ex A interuallo commodo arcus describo B, C, atque ex B, & C alios arcus infra quouis spatio, & ex sectione D ad A rectam duco AD, in qua est AE.

Demonstratio. AB,BD æq. AC,CD.
a 11.T.1. commune AD. ergo [a] ang. BAE æqu. CAE,& BA, AE æqu. CA, AE.
b 1.T.1. ergo [b] ang. AEB æqu. AEC.

PROBLEMA 7.

E*Ducere perpendicularem ex dato puncto extrema in linea.*

Datur. punct. A in AB.



Postulatur. Perpend. AD.

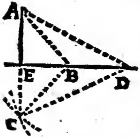
Praxis. Aperto ad libitum circino pedem figo in A,& alterum ad libitum in C, ex quo deſcribo circulum DAB, & vel diametrum BCA deſigno, ducoque DA, vel ex B ter decurro circino ſupra circulum vſque in D, ducoque DA.

Demonſtratio. DAB ſemicirculus eſt. ergo in eo rectus angulus DAB.

PROBLEMA 8.

PErpendicularem demittere ex dato extra lineam extremam puncto.

Datur. Punctum A, recta ED.



Postulatur. Perpend. AE.

Praxis. Sumo ad libitum punctum B ex quo interuallo BA describo arcum infra. Item sumo aliud D ex quo interuallo DA arcum infra designo atque ex sectione C ad A duco rectam AC, in qua est AE.

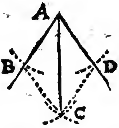
Demonstratio. AB, AD æqu. CB, CD. commune BD. ergo [a] angulus BDA æq. BDC. Item AD, DE æqu. CD, DE. & ang. ADE æq. CDE. ergo [b] ang. DEA æq. DEC.

a 11. T. 1.
b 11. T. 1.

PROBLEMA 9.

D*Atum angulum rectilineum secare bifariam.*

Datur. Angulus BAD.



Postulatur. Æquales BAC, DAC.

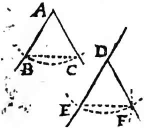
Praxis. Ex A quouis interuallo arcus deſcribo B, D. tum ex B, D quouis ſpatio arcus deſcribo, ducoque ex ſectione C rectam AC, quæ facit CAB, CAD.

Demonſtratio. BA, BC æqu. DA, DC, commune AC. ergo a æquales BAC, DAC. a 11. T. 1.

PROBLEMA 10.

Dato angulo æqualem alium ad datum lineæ punctum describere.

Datur. Angulus BAC. punctum D in recta DE.



Postulatur. Ang. EDF æqualis BAC.

Praxis. Ex A quouis interuallo arcũ describo BC, eodemque spatio ex D arcum EF. tum ex E interuallo BC arcum designo in F, perque F duco rectam DF, quæ facit ang. EDF.

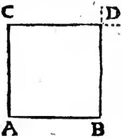
Demonstratio. AB, AC æqu. DE,
a 11.T.1. DF, & BC æq. EF. ergo a angulus BAC æq. EDF.

PRO.

PROBLEMA 11.

S*Vper data recta quadratum describere.*

Datur. AB. *Post.* quadratum AD.



Praxis. Ex A eleuo perpendicularem AC. tum ex eodem A interuallo AB arcum deſcribo C, & ex C arcum D, & ex B arcum D. ducoque rectas CD,BD.

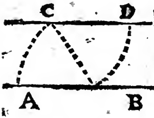
Demonſtratio. AC, AB æqu. DC,
DB. Commune BC. ergo [a] angulus a 11.T.1.
A æq. D,&alij aliis, eique ſemi re
cti ob æqualia latera. [b] ergo & C, & b 5.T.1.
B recti. tandem A & B recti ergo [c] c 15.T.1.
AC,BD parall. vti AB,CD.

PROBLEMA 12.

D*Vcere parallelam data linea ex dato puncto.*

Datur. Recta AB. punctum C.

Postulatur. CD parallela ipsi AB.



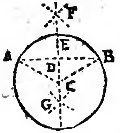
Praxis. Ex puncto C duco occultam quamuis CB: tum ex B interuallo BC arcum describo CA, itemque ex C eodem spatio arcum BD, atque ex B interuallo AC arcum designo D, ducoque à sectione D ad C rectam CD.

Demonstratio. AB, AC æq. DC
a 11.T.1. DB, comm. BC. ergo [a] angulus
b 12.T.1. ABC æqualis alterno DCB. ergo [b] AB, CD parallelæ.

PROBLEMA 13.

D*Atum arcum secare bifariam.*

Datur. arcus AEB. *Post.* æquales AE, EB.



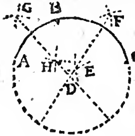
Praxis. Intelligo occultã AB, eamquediuido [a] bifariam occultâ FG, datque sectio E arcus AE, EB. a 5. P.

Demonstratio. FG secat AB bifariam, & perpendiculariter ergo [b] FG transit per centrum occulti circuli C, ex quo occultæ CA, CB. Hinc CA, AD æq. CB, BD, commune CD ergo ang. ACD æqu. BCD ad centrum ergo [c] æquales arcus AE. EB. b 2. T. 2. c 10. T. 2

PROBLEMA 14.

Dati arcus centrum reperire, & circulum absoluere.

Datur. Arcus A B C. *Post.* centrum D.



Praxis. Sumo in arcu ad libitum tria puncta A, B, C. tum diuido bifariam arcum AB [a] occulta GH, itemque arcum BC occulta FE, estque sectio D centrum, ex quo circulus absoluitur.

a 13. P.

Demonstratio. GH, FE transeunt per centrum. [b] ergo in illis est centrum. ergo in sectione D.

b 2. T. 2.

PROBLEMA 15.

Dati circuli centrum reperire.

Datur. Circulus ABC. *Post.* centrum D. Figura Proble. præced.

Praxis. Sumo in circumferentia tria quæuis puncta A,B,C & vt supra reperio D.

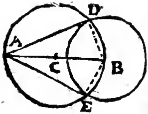
Demonstratio. Eadem, quæ supra.

Hinc datis tribus punctis non in directum positis per ea Circulus describetur.

PROBLEMA 16.

A Dato puncto rectam ducere, quæ tangat circulum.

Datur. Circulus DCE. punctum A.



Postulatur. A D, vel A E tangens circulum in D, vel E.

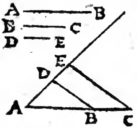
Praxis. A puncto dato A ad centrum B rectã duco AB, eamque bifariam diuido in C, & ex C interuallo CB occultum circulum describo ADBE, ducoque à sectionibus D,E rectas AD, AE.

Demonstratio. Angulus ADB est in
a 14.T.2. semicirculo. ergo [a] rectus. ergo [b]
b 15.T.2. AD tangit circulum.

PROBLEMA 17.

Datis duabus lineis tertiam proportionalem reperire.

Datur. AB, BC.
Postulatur. Tertia DE, vt sit sicut



AB ad BC, ita BC ad DE.

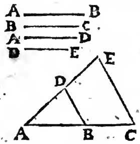
Praxis. Super obuia recta AC sumo AB, BC æquales datis AB. BC. tum ducta ad libitum AE sumo in ea AD æqualem secundæ BC, ducoque rectam BD, & per C rectam CE parallelam ipsi BD.

Demonstratio. BD parall. lateri CE. ergo a vt AB ad BC, ita AD, hoc est BC ad DE. a 2.T.4.

PROBLEMA 18.

D*Atis tribus lineis quartam proportionalem reperire.*

Dantur. Rectæ AB, BC, AD.



Poſt. Quarta DE. vt ſit ſicut AB ad BC, ita AD ad DE.

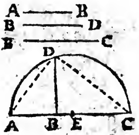
Praxis. Super obuia AC ſumo AB, BC æquales primæ, & ſecũdæ AB, BC. tum ducta ad libitum AE, ſumo in ea AD æqualem tertiæ AD, ducoque BD, & ex C rectam CE parallelam ipſi BD.

Demonſt. DB eſt parall. lateri EC. ergo vt AB ad BC, ita AD ad DE.

PROBLEMA 19.

Datis duabus lineis mediam proportionalem reperire.

Datur. AB, & BC. *Poſtulatur.* Media BD vt ſit ſicut AB ad BD, ita BD ad BC.



Praxis. Super obuia AC ſumo AB, BC æquales

datis AB, BC, atque ex illarum dimidio E describo semi-circulum ADC, & erigo ex B perpendicularem BD.

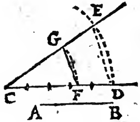
Demonstratio. Angulus ADC in semi-circulo rectus est, [a] & ab apice D perpendicularis DB. ergo [b] ABD, DBC similia. ergo [c] vt AB ad BD, ita BD, ad BC.

a 14. T. 2.
b 6. T. 4.
c 1. D. 4.

PROBLEMA 20.

A *Data linea imperatas partes auferre.*

Datur. Recta AB. *Postulantur* tres quintæ FG.



Praxis. Sumo ad libitum rectam CD, & in ea quasuis partes æquales quinque tum ex C interuallo vltimæ D arcum describo DE, atque ex

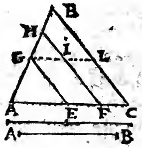
D interuallo trium partium (quia tres quintæ postulantur) duco arcum circa E atque à sectione E ad C duco rectam CE, tandemque ex C interuallo AB arcum describo FG, ducoque rectam FG.

Demonstratio. Æqui-angula sunt
a 16.T.2. CFG, CDE. [a] ergo [b] vt CD ad DE,
b 3.T.4. ita CF, siue AB ad FG. CD habet 5, & DE 3. ergo AB 5. GF 3.

PROBLEMA 21.

D*Atam lineam similiter secare, vt alia secta fuerit.*

Datur. AC diuisa. AB diuidenda.



Post. AB diuisa in G,H,B, vt AC in E,F.

Praxis. Iungo duas AB, AC vt faciant quemuis angulum BAC. tũ duco rectam BC, & per puncta E,F

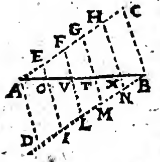
rectas EG, FH parallelas lateri BC.

Demonstratio. Vt AE ad EF, ita AG ad GH,[a] ac ducta GL parallela lateri AC, vt GI ad IL, ita GH ad HB, est vero EF æq. GI, & FC, IL. ergo vt EF ad FC, ita GH ad HB. a 2.T.4.

PROBLEMA 22.

Datam lineam diuidere in quotlibet partes æquales.

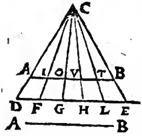
Datur. AB. *Post.* quinque partes æquales in O, V, T, X, B.



Praxis. Ex A duco ad libitum AC, & ex B rectam BD parallelam ipsi AC. tum ad libitum sumo partes æquales quinque in rectis AC, BD, ac per opposita puncta duco rectas occultas AD, EI, EL, &c. quæ dant O, V, T, X.

Demonst. AE, DI æquales, & parall
a 20.T.1. ergo [a] AD, EI æqu. & parall. vti & cæteræ FE, GM &c. Hinc vt AE ad EF, ita AO ad OV. AE æq. EF. ergo AO æq. OV. ita cæteræ vt supra.

Aliter. duco rectam DE, & in ea sumo ad libitum quinque partes æquales F, G, H, L, E, tum super recta DE facio triangulum Isosceles CDE, ducoque rectas CF, CG, CH, CL. tandem ex C sumo CA, CB æquales datæ AB, ducoque rectam AB diuisam in I, O, V, T. æqualiter.



Demonstratio. CAB, CDE æqui angula. [a] ergo [b] AB parallela DE. ergo
a 16.T.2.
b 13.T.1. vt FD ad DC, ita IA ad AC, siue AB. DF est vna quinta DC ergo AI quinta AC. Item vt GD ad DC ita OA ad AC, GD duas habet quintas ipsius DC. ergo & OA ipsius AC. AO duas habet quintas, AI vna est. ergo IO altera, & ita de reliquis.

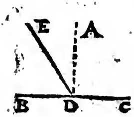
NOTÆ

NOTÆ GEOMETRICÆ.

AD Introduct. numerum 9. Nonnulla ſupponit Euclides, de quibus conſtruendis, habendiſque nihil præſcripſit, dum iis vtitur cum hypotheſi. Ita lib. 1. prop. 4. loquitur de quibuſcunque triangulis, ac ſupponit æquales angulos: Et prop. 14. angulos etiam ſupponit, qui fiunt deinceps æquales duobus rectis: Et prop. 28. angulos duos internos æquales duobus rectis. Ita lib. 3. prop. 24. ſupponit ſimilia ſegmenta ſuper eadem recta, & alibi alia.

Ad numerum 10. Geometria Speculatiua, & Mixta præparationem adornant peculiari ſibi modo, vt videre eſt exempli gratia circa propoſitionem, quæ eſt 13. lib. 1. apud Eu-

clidem, hic 2. lib. 1. Talis vero est. Cum recta linea super rectam consistens angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales facit. Illa vbi proposita est de more, ad præparationem itur, ac Geometria quidem vtraque ante hanc supponit generalem ratiocinationem, applicatam tamen peculiari proposito vt est opus. Tanti sunt duo angnli EDB, EDC, quanti deprehenduntur, & demonstrantur, si educatur ex puncto D perpendicularis possibilis DA. Sed si educatur ex D perpendicularis possibilis D A, deprehenduntur, ac demonstrantur æquales duobus rectis. Ergo sunt æquales duobus rectis. Certa vero est ratiocinatio illa, ac propositio illius maior negari non potest; quin conuellatur Euclidis propositum, ac probando Theoremati aditus omnis



præcludatur. Porro hac ſub intellecta ratiocinatione, quæ, quia generalis eſt, & perpetua, ac perſe clara, ommittitur, ad tacitam illius minorem vt accedant eamque probent, Speculatiua contenta eſt ſola hypotheſi poſſibili: Mixta vero, quia ad manum habet Practicam, rem de facto exequitur, & iuxta leges à Practica traditas reapſe perpendicularem excitat, adeo vt præparatio in vtraque ſit diuerſa, licet idem ſit exitus. Sic igitur ſpeculatiua præparat, & demonſtrat, vbi propoſuit. Si à pencto D educatur perpendicularis poſſibilis DA, vel cum ea conueniet recta DE, vel non. Si conueniat, facit vtrimque æquales angulos, adeoque rectos. Si non conueniat, ſed ad latus declinet, vt fiant tres anguli BDE, EDA, ADC, duo anguli EDB, EDC ſunt æquales tribus illis angulis; atque iiſdem tribus ſunt æquales duo recti ADB, ADC. ergo duo EDB, EDC ſunt æquales duobus rectis

ADB, ADC. At vero Mixta sic præparat absolutè. Educatur ex puncto D perpendicularis DA; atque hoc posito, sic demonstrat. Vel recta ED consentit cum perpendiculari AD, vel non. si consentit, &c. vt ante dictum in speculatiua. Idem possemus ostendere circa propositiones alias, quarum in demonstratione vsi sumus hypothesi, etsi non expressa, vt ne discederemus à vulgari præparandi modo, rati esse satis, si moneremus præparationem illam, quam adhibemus verbis in speciem absolutis intelligendam esse hypotheticè, adeo vt, cum dicimus Excitetur perpendicularis possibilis, idem sit, ac si dicamus, si rexcitetur perpendicularis possibilis, vel excitetur hypothetice. De cætero vsi sumus noua illa præparandi ratione, quod & commoda, & facilis, & compendiosa sit visa.

Ad Axioma 8. Quod à nobis subiicitur Euclidei loco, magis videtur in vsu, & sensu communi positum,

vt facile quiuis intelliget, si vtrumque velit committere.

Ad lib. 2. Prop. 8. & 9. Quia à segmentis æqualibus ad circumferentias illarum æquales non videtur necessaria, & immediata consecutio, ad solitas demonstrationes nonnihil est appositum, vt sua sit consequentibus Theorematis certitudo.

Ad Definitiones Rationis, & Proportionis lib. 3. Nouæ aliquot Definitiones sunt additæ, quæ necessariæ videntur, vt ea, quæ de Proportionibus. & magnitudinibus proportionalibus demonstrantur passim, vsui esse possint. Id qui volet experiri, videat an hærendo in Euclideis aliquid possit concludere ex propositione prima libri sexti, quæ hic prima est libri tertij, hac in hypothesi, eodemque in schemate, vt de cæteris faciat coniecturam.

Sit basis BC duorum pedum: sit EF vnius. sit triãguli ABC area vnius pedis quadrati: quanta erit area triãguli DEF?



si sic ratiocineris, vt se habet BC ad EF, ita ABC ad DEF. Sed BC est duplum ipsius E F. ergo ABC est duplum ipsius DEF, sic ego respondebo. Vt se habet BC ad EF, ita ABC ad DEF. explico maiorem propositionem, id est acceptis æquemultiplicibus primi BC, & tertij ABC, itemque æquemultiplicibus secundi EF, & quarti DEF, multiplices primi BC. & secundi EF concordant cum multiplicibus tertij A B C, & quarti DEF. Definitio enim, & definitum ita conuertuntur, vt alterum alterius loco poni possit, idemque præstet. Sed BC est duplum ipsius EF. Esto. Ergo & ABC duplum ipsius DEF. Vnde consequentia? Qui

illi concordiæ multiplicium cum duplo? Quod si ita interpretere. Vt se habet BC ad EF, ita ABC ad DEF, id est, Quantum BC continet, EF, tantum ABC continet DEF. Belle quidem succedet negotium: at vnde tibi illa expositio, aliam nisi accersas definitionem ad Euclidea? At Euclidea generalis est, & Rationales, æque ac Irrationales magnitudines complectitur, quod vix alia præstiterit. Quidni? Vt ne rogem vicissim ab Euclide vnde illa proportionalium generalis proprietas, quæ definitionem generalem constituit. Sed hic satis.

ADITVS IN ARITHMETICAM.

PErstringet ille duntaxat Numerationem, & ex vulgaribus regulis eas, quæ res Mathematicas attingenti sunt planè necessariæ, quoad fuse tota de Arithmetica, & numerorum natura differatur.

NVMERATIO.

Absoluitur illa decem characteribus, qui numeros omnes representant, & Digiti vocantur: ecce tibi.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Duo in Numeratione spectanda Ordo, & Gradus, atque vterque petendus à dextera scribentis ad sini-

ſtram, adeo vt creſcant dignitate, & valore dum ſiniſtram verſus promouentur.

Ordines illi ſunt Vnitates, ſiue res numeratæ, Milleni, Milliones, Billiones, Trilliones, Quadrilliones, Quinilliones, Senilliones, Septilliones, Octilliones, Nonilliones, Denilliones, Vndenilliones, &c.

Gradus, qui in ſingulis ordinibus ſeruantur ſunt tres dumtaxat, Ordo ipſe, vel illius nomen, Denarij & Centenarij.

Porro nullus vnquam aut Ordo, aut Gradus vacuus relinquitur, ſed, ſi nullum habet characterem ex iis, qui valent, aſſumitur zero, qui locum impleat, en exemplum, ex quo de cæteris coniicias.

3.425.632.040.053.267.43.256

5 4 3 2 1 3

Apices, & minuti numeri, qui infra ponuntur ordiendo à puncto Ordines indicant. ſic vero percenſe incohando à ſiniſtra, vt moris eſt legentium.

Tercentum quadraginta duo quinilliones: quingenti ſexaginta tres quadrilliones: ducenti quatuor trilliones: quinque billiones: trecenti viginti ſex milliones: ſeptingenta quadraginta tria millia: ducenti quinquaginta ſex Nummi.

Porro creſcunt, gradus in proportione decupla, adeo vt ſecundus ſit decuplus primi, & tertius ſecundi: vnde fit, vt Ordines creſcant in proportione millecupla, & Millio millies contineat mille, ſicut Billio millies millionem, adeoque bis millies mille, ſic vt retinere poſſis veterem, numerandi formam per vocem illam millies, iuxta quam ita cenſebis ſuperiorem ſummam. Trecenta quadraginta duo millia quinquies millies: quingenta ſexaginta tria millia quater millies: ducenta quatuor millia ter millies: quinque millia bis millies: trecenta viginti ſex millia millies: ſeptingenta quadraginta tria millia; ducenti quinquaginta ſex Nummi.

ADDITIO.

N*Vmerorum est in vnam summam collectio.*

Summas addendas ſubſcribe alias aliis, itavt vnitates ſint ſub vnitalibus, ſub decadibus decades, &c. tum ducta linea ordire à dextris.adde ſingillatim gradus ſingulos inter ſe, & ſummam ex iis collectam ſcribe ſub linea hac lege vt in ſingulis collectionibus vnum ponas characterem, eumque, qui vnitates repreſentat, alium ſerues, & numeres cum iis, qui ſpectant ad gradum ſuperiorem. En exempla.

64	243	543
183	532	762
247	775	1305

Adde 64, & 183, collocabis vt vides, ac dices 4 & 3 faciunt 7, poneſ-

que infra lineam eodemque in gradu 7. tum ad alium gradum, & dices 6, & 8 dant 14, ponesque 4 ac retinebis vnum quem referes ad superiorem gradum, & dices 1. & 1 dant 2, ponesque duo.

SVBTRACTIO.

Summæ est à summa sub ductio.

Subtrahendum numerum scribe infra illum aquo est subducendus ea lege, quæ ante est posita, tum ducta linea incipe à dextra, & singillatim figuras inferiores subtrahe à superioribus, & quod reliquum est, scribe eodem in gradu infra lineam.

68	768	479
33	532	258
35	236	221

A 68 subtrahæ 33. Scribe vt vides, & dic

& dic ab 8 ſubtrahe 3, reſtant 5. pone 5 infra lineam, & perge ad gradum alium, & dic à 6 ſubtrahe 3, reſtant 3. pone 3, habeſque reſiduum 36.

Quod ſi character ſuperior ſit minoris valoris, quam inferior, inferiorem ſubtrahes à numero Decem, ac reſiduum addes ſuperiori, ſummamque illorum ſcribes ſub linea, & addes vnitatem figuræ, vel gradui præcedenti in ſumma ſubducenda.

74	20	300
36	7	244
38	13	56

Subtrahe 36 à 74. Scribe vt vides, & quia 4 minus valent quàm ſex ſic dices à 10 ſubtrahe 6 reſtant 4. 4 & 4 faciunt 8, ac ſcribes 8, & perges ad alium gradum addita prius vnitate, vt loco 3 ſint 4, ac dices à 7 ſubtrahe 4, reſtant 3, & ſcribes 3 vt ſit reſiduum 38. Iterum à 20 tolle 7 ſcribe 7 ſub 20 & quia zero nihil valet

dices à 10 subtrahe 7 restant 3. 3 & o dant 3, scribes 3 & præcedenti gradui in quo nihil est addes vnitatem, ac dices à 2 subtrahe 1 restat 1. & scribes 1, vt sit residuum 13.

Examen additionis, & subtractionis.

Altera per alteram examinatur. Addidisti 24 & 47, atque habes 73: vt examines subtrahe alterutram ex summis partialibus à summa totali, & si in residuo est altera, probè fecisti. tolle 47 à 73 restabunt 26. Idem facies in subtractione.

26	73
47	47
73	26

Subduxisti 47 à 73, & restant 26. examina; iunge residuum, & summam subductam, 26, & 47, ac si ambæ dant summam totalem 73, bene est.

Vtraque etiam examinatur per subtractionem nouenarij. Is tollitur quoad potest à summis adden-

dis, & notatur reſiduum, ſiue vt vocant Examen. Item tollitur à ſumma totali, & examen notatur. Si conſentiunt examina, probefa-ctum. Examen 26, & 47 eſt 1. Examen 73. 1. Idem in ſubtractione: Examen 73 eſt 1. Exam. 47, & 26 eſt 1. belle.

26	1	73	1
47		47	
—		—	1
73		26	

MVLTIPLICATIO.

DVctus eſt numeri in numerum, ſiue ſumptio numeri alicuius toties, quoties ab alio ſignificatur.

Scribe multiplicatorem ſub multiplicando iuxta legem antea latam: tum ſingulos ſingillatim characteres ſuperioris multiplica per inferiorem, & ſummam ſcribe infra lineam ſeruato ſemper decadum.

charactere, eum vt adiicias sequenti multiplicationi. Duc 43 in 6. scribe 6 sub 43 infra 3. tum ducta linea dic sexies tria dant 18. pone 8, & serua 1 siue vnam decadem. deinde dic sexies quatuor dant 24. 24, & 1 seruatum dant 25 pone 5, & serua 2, quæ tandem ponis, cum nihil supersit, vt habeas 258.

```
 43
  6
---
258
```

Quod si in Multiplicante sint plures characteres, singulos singillatim duces in singulos characteres Multiplicandi, & summas vt ante scribes ab eo gradu in quo est character multiplicans, tandemque summas omnes colliges. Duc 37 in 25. scribe 37, & infra 25 vt ante est præscriptum; tum ducta linea dic quinquies 7 dant 35. pone 5, & serua 3. iterum quinquies 3 dant 15. 15 & 3 seruata dant 18 pone 8, & quia nihil agendum superest isto in charactere, appone 1, vt summa multiplicatoris 5

```
 37
 25
---
185
74
---
925
```

ſit 185. Mox ad alium characterem 2,& dic bis 7 dant 14. pone 4, ſub 2. multiplicante ſerua 1. iterum bis 3 dant 6. 6, & 1 ſeruatum dant 7. pone 7, vt ſumma multiplicantis 2 ſit 74. Tandem ſummas ita diſpoſitas collige per additionem, & habebis 925.

Porro proderit ad facilem operationis praxim habere tabulam Pythagoricam ex qua facile colligitur multiplicatio digitorum. ecce tibi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Quæris quid faciant 5 in 6 siue quinquies 6. sume in limbo superiori 5. & in laterali 6, habebisque in concursu 30. ita cæteris.

DIVISIO.

Reductus est numeri à numero, siue inuentio numeri, qui significet quoties vnus sit in alio. Tres sunt in diuisione numeri. Vnus appellatur Diuidendus, alter Diuisor, tertius Quotiens. vis diuidere 47 nummos duobus militibus, & quæris quot quisque accipiat, siue quoties duo reperiantur in 47. Diuidendus est 47. Diuisor 2. Quotiens is qui quæritur numerus. Scribe igitur 47, & infra 2 non à dextris vt ante sed à sinistris sub 4. tum solennem versiculum exquere.

Diuide, multiplica, subtrahe, promoueas.

47.	(2
2	
4	
47	(23 $\frac{1}{2}$
2	
6	

Diuide, hoc est vide quoties inferior sit in superiori. 2 in 4, bis. pone ad latus, vbi Quotienti est locus, 2. tum Multiplica, siue duc characterem appositum. Quotienti in totum Diuisorem, bis 2. dant 4. pone 4 infra Diuisorem, vel in mente retine, ac postea Subtrahe, hoc est inuentam eam summam aufer ab ea parte Diuidendi, quæ supra illam reperitur, 4 ex 4, nihil restat, adeoque Promoueas, hoc est vno gradu versus dexteram diuisorem totum pro moue, pone 2 sub 7, & iterum versiculum exequere. Diuide. 2. in 7. ter. pone 3 in Quotiente. Multiplica. ter duo dant 6. pone 6 infra diuisorem 2. Subtrahe. 6 ex 7, restat 1. pone supra

7, aut, quia nihil agendum restat, serua vt facias numerum fractum collocando residuum 1 post Quotientem, & ducendo lineolam, ponendoque infra illam Diuisorem, adeo vt singulis militibus sint nummi 23 $\frac{1}{2}$.

Quod si alij occurrant casus solues illos ex sequentibus regulis.

Prima. Quando Diuisor est maior numero supra illum posito (supra illum vero sunt omnes characteres versus sinistram) nihil opus diuisione, adeoque appone zero Quotienti (nisi forte esset operationis initium) & quasi esset expletus versiculus Diuisorem promoue.

Secunda. Si facta multiplicatione reperitur summa maior numero posito supra diuisorem, tolle de Quotiente vnitatem, & iterum multiplica, atque illud fac toties, quoad summa, quæ ex multiplica-

tione fit, fit vel minor, vel æqualis numero ſupra Diuiſorem poſito. Is vero caſus tunc contingit, cum in Diuiſore primi Characteres ſunt minores poſterioribus.

Tertia. Quando in Diuiſore ſunt multi characteres, ſatis eſt vt primus diuidat partem diuidendi ſupra ſe poſitam, ac poſtea Quotienti appoſitus character totum diuiſorem multiplicet.

Quarta. Si primus character diuiſoris ſit plus quam nouies in ſupra-poſito numero, non apponitur Quotienti niſi nouenarius.

Diuide 946 per 43. Scribe 43 ſub 94 & verſiculũ exequere. Diuide 4 in 9 bis. pone 2 in Quotiẽte. Multiplica. bis 43, aut ſane ſingillatim, & per partes, bis 4 dant 8. ſubtrahe 8 ex 9, reſtat 1 pone 1 ſupra 9, & abſolue. bis 3 dant 6. ſubtrahe. 6 ex 14, reſtant 8 pone 8 ſupra 4, adeo vt reſtent in diuidendo 8 6. Promoueas. pone 4

1	
9 4 6	(2
4 3	

86	(22
43	

ſub 8, & 3 ſub 6, atque iterum verſum exequere vt anteà. 4 in 8, bis. bis 4, 8. 8 ex 8, nihil. iterum bis tria 6, 6 ex 6 nihil. Quotiens 22.

Diuide 134 per 2. Poneres 23 ſub 13, ſed quia ſuperior numerus 13 minor eſt 23, promouebis poſito zero in quotiente, niſi eſſet operationis initium. Scribe igitur 23 ſub 34. & verſum exequere. Diuide in 13 quoties 2. ſexies pone in Quotiente 6. Multiplica. ſexies 2 dant 12. ſubtrahe: 12 ex 13, reſtat 1. ponis 1 ſupra, & loco 3. Iterum Multiplica ſexies 3 dant 18. ſubtrahe. 18 ex 14. minor eſt ſuperior, adeoque de quotiente 6 demenda vnitas, ac ponenda 5, & de nouo inchoanda partialis operatio. Quinquies 2. dant 10. 10 ex 13, reſtant 3. &c.

134	(5
23	

EXAMEN
Multiplicationis, & Diuisionis.

ALtera per alteram probatur. Ducis 25 in 10 & habes 250. Vt probes diuide productum 250 vel per 25, & si quotiens est 10 bene est, vel per 10, & si quotiens est 25, factum bene.

Similiter. Diuidis 250 per 25 & habes quolientem 10. vt probes multiplica 10 per 25, & si productum est 250, bona est operatio.

Vtraque etiam probatur per examen numeri 9, & quidem Multiplicatio sic. Multiplicas 452 per 335, & habes productum 151420. sume examen primi 452 scilicet 2; item examen secundi scilicet 2; Duc vnũ in alterum & extabit verum examen multiplicantium scilicet 4. Item à producto 151420 remoue nouenarium ac si examen est 4, factum bene.

Diuiſio vero ſic. Diuidis 587 per 48 & exit quotiens $12\frac{11}{48}$. ſume examen diuiſoris ſcilicet 3, itemque examen quotientis ſcilicet 3 vnum multiplica per alterum & habis 9, hoc eſt zero quibus addes examen reſidui 11, ſi ſit, ſcilicet 2, vt extremum examen ſit 2. ſimiliter adi diuiſum numerum 587, & ab eo tolle nouenarium, ac ſi 2 ſuperſunt, belle.

Aurea regula Proportionis, ſiue trium.

AVrea appellatur ob inſignes vtilitates: Proportionis vero, quod fundata in Proportione, & proportionem præſtans: denique Trium, quod in tribus ſita terminis, quorum duo primi habent inter ſe rationem aliquam, ac quæritur quartus, qui eandem habeat cum tertio rationem, quam ſecundus

dus habet cum primo. Nempe 4 milites absumunt aureos 10, quæris quot absument, 6 milites? Primus terminus 4 Milites: secundus 10 aurei: tertius 6 Milites: quartus quæritur, hoc pacto posita quæstione, si 4 dant 10; 6 quid? sic vero soluitur hunc exequendo versiculum.

Duc tertium in medium, productum diuide primo.

Hoc est duc 6 in 10, & existent 60, atque hoc productum 60 diuide per primum, scilicet 4, & extabit quartus quæsitus 15 dicesque si 4 Milites absumant 10 aureos fore, vt 6 absumant 15.

Regulæ demonstratio petitur ex proprietate proportionalium quantitatum, quæ talis est, vt duæ mediæ multiplicatæ inuicem tantum producant, quantum duæ extremæ inuicem multiplicatæ.

MINVTIÆ, aut Numeri fracti.

FRactiones intellige partes eas in quas totum aliquod in tegrum tribuitur. Ita si nummum diuidas quatuor in partes, appellabis eas Fractiones vnius nummi integri, easque à numero 4, secundum quem nummus est diuisus, Quartas denominabis, & eas appellares sextas, si nummus sex in partes esset distributus. Atque eo pacto in fractionibus duo sunt numeri lineola diuisi, alter inferior, qui partes eas, in quas totum est diuisum, denominat, vocaturque eam ob rem.

Denominator; alter superior, qui, quia partes denominatas numerat, vocatur Numerator, ostenditque quot ex denominatis partibus totius diuisi assumantur. Fractionem igitur istam $\frac{2}{3}$ appellabis

duas tertias, & istam $\frac{1}{4}$ vnam quartam, & istam $\frac{3}{6}$ tres sextas.

Cæterum vt operationes, quæ circa minutias fiunt, intelligantur facilius ad regulam istam generalem vertendi sunt oculi.

Quoties duo numeri multiplicantur, aut diuiduntur per aliquem numerum, toties Producta retinent eandem inter se proportionem, quam habebant numeri multiplicati, vel diuisi. Sint duo numeri 4, & 6, multiplicentur per tria, & extabunt 12, & 18, eademque erit proportio 12 ad 18 quæ erat 4 ad 6. Item duo sint numeri 12, & 18, diuidantur per 3, & extabunt Quotientes 4, & 6, eritque eadem proportio 4 ad 6, quæ erat 12 ad 18. Atque eam ob rem, cum in Minutiis spectetur proportio Numeratoris ad Denominatorem, Minutiæ, quæ eandem habebunt proportionem, eædem erunt, & idem valebunt, vt $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$.

idem valent, & quæ fient ex multiplicatione, vel diuiſione eiuſdem numeri, eædem erunt.

Operatio 1. Datas Minutias reuocare ad eandem Denominationem. Multiplica primam per denominatorem ſecundæ, & ſecundam per denominatorem primæ. Sunt $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ dic 3 in 3 dant 9. & 3 in 4 dant 12. ecce primam $\frac{9}{12}$. Iterũ bis 4 dant 8, & 4 in 3 dant 12. en ſecundam $\frac{8}{12}$, ac duæ iſtæ $\frac{9}{12}$ $\frac{8}{12}$ eædem ſunt cum datis $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$, habentque eundem Denominatorem.

Operatio 2. Ex datis Minutiis cognoſcere, quæ plus valeat. Reuoca eas ad eundem. Denominatorem, & cuius maior erit Denominator, illa plus valebit. Dantur $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ quæritur vtra plus valeat. Reuoca ad eundem Denominatorem $\frac{9}{12}$ $\frac{8}{12}$, & prima plus valebit.

Operatio 3. Ex dato numero integro Fractionem facere. Duc lineolam infra datum numerum, & sub lineola pone vnitatem. Dantur 8, & habebis $\frac{8}{1}$ octo primas, siue 8. Integra.

Operatio 4. Ex data Minutia, cui Denominator sit vnitas, integrum facere. Tolle lineolam, & vnitatem. Dantur $\frac{8}{1}$ & habes 8 integra.

Operatio 5. Datum numerum integrum reuocare ad datum Denominatorem, siue ex eo facere Minutiam, quæ habeat datum Denominatorem. Duc Integrum datum in datum Denominatorem, & habebis Numeratorem dati Denominatoris. Dantur 8 Integra, & pro Denominatore 3 Dic 3 in 8 dant 24, & habes $\frac{24}{8}$. Vis rationem, vt inde cætera colligas? Ex 8 Integris fac Minutiam, nempe $\frac{8}{1}$, tum multiplica per Deuenominatorem 3, tam Nu-

meratorem, quam Denominatorem, & habebis $\frac{24}{3}$ eadem in proportione cum $\frac{8}{1}$.

Operatio 6. Ex data Minutia Integros educere, quando sunt, siue quando Numerator est maior Denominatore. Diuide Numeratorem per Denominatorem, & Quotiens dabit integra. Dantur $\frac{24}{3}$. Dic 3 sunt in 24 octies, & habes 8 integra, idemque est ac si iuxta regulam diuideres 24, & 3 per 3, haberesque $\frac{8}{1}$. En aliud exemplum $\frac{17}{12}$ dant 1 $\frac{5}{12}$.

Operatio 7. Minutiam Minutiæ addere. Has reuoca ad eundem denominatorem, & postea adde Numeratores. Dantur $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ facis $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ ac postea $\frac{17}{12}$.

Operatio 8. Minutiam ex data Minutia subtrahere. Has reuoca ad eundem Denominatorem, & postea Numeratorem subtrahe à De-

nominatore. Dantur $\frac{2}{3}$ ſubtrahendæ à $\frac{3}{4}$, facis ex iis $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, & pro reſiduo $\frac{1}{12}$.

Operatio 9. Minutiam multiplicare per datam Minutiam. Duc Numeratorem in Numeratorem, & denominatorem in denominatorem. Dantur $\frac{2}{3}$ multiplicandæ per $\frac{3}{4}$ & facis $\frac{6}{12}$.

Operatio 10. Minutiam diuidere per datam Minutiam. Duc Denominatorem Diuiſoris in Numeratorem diuidendi, & habebis Numeratorem Quotientis. Item duc Numeratorem Diuiſoris in Numeratorem diuidendi, & habebis Denominatorem Quotientis. Dantur $\frac{2}{3}$ diuidendæ per $\frac{3}{4}$ & habes $\frac{8}{9}$.

Operatio 11. Minutiam datam reuocare ad datum Denominatorem. Fac regulam trium, vt Denominator datæ minutiæ ad Numeratorem

suum, ita Denominator datus ad suum Numeratorem, qui quæritur. Dantur $\frac{3}{4}$ reuocandæ ad vigesimas siue Denominatorem 20. Dic si 4 dant 20 quid? & habebis 15 pro Numeratore quæsito, eritque quæsita Minutia $\frac{15}{20}$ eadem cum $\frac{3}{4}$.

Operatio 12. Circa Minutias iunctas cum integris operari. Reuoca integra ad Minutias quibus iunguntur, & postea operare ex superioribus legibus. Dantur 4 $\frac{2}{3}$ multiplicanda per $\frac{3}{4}$, fac ex 4 $\frac{2}{3}$ $\frac{14}{3}$, & postea Minutias illas $\frac{14}{3}$ & $\frac{3}{4}$ multiplica, habebisque $\frac{42}{12}$.

Extractio radicis quadratæ.

Extractio illa est inuentio, numeri, qui per se ipse multiplicatus redeat propositum numerum,

vel proxime minorem quadratum numerum. Dantur 100, & inuenitur 10, qui decies sumptus dat 100. Item dantur 100, & inuenitur 10, qui ductus in 10 dat 110 proxime minorem, cum maior proxime quadratus numerus sit 121.

Porro habenda sunt in promptu minora quadrata, siue digitorum, vt ex iis cætera inueniantur. Sunt autem hæc.

1. 1
2. 4
3. 9
4. 16
5. 25
6. 36
7. 49
8. 64
9. 81

Regulam vero extrahendæ radicis sic illigamus versibus, vt facilius retineatur.

Primus, & alternus signatur, vt indice in illo
Noscatur moles radicis: singula deinde

Membra putas. Primi Quadratum tolle ab eodem,
Radicemque nota in Quotientem. Post geminabis
Totum illum, & scribes punctum prope, vt hoc tribuatur
Qui supra est numerus, punctoque adscribe recentem,
Adque latus signa Quotientem; vt singula solus
Multiplicet, summamque ex summa denique tollas.

Quæritur radix numeri 8797. Notantur puncto primus, & tertius, atque hinc duo erunt characteres in radice, & duo membra, & duæ operationes.

6	
8797	(9
• •	
81	

Prima circa primum membrum incipiendo à sinistra scribentis, scilicet 87: quæris maximum in eo quadratnm ex allatis ante, estque 81, atque illud tollis ab 87, habesque 6 pro residuo, & inuenti qua-

drati 81 radicem 9 ponis in loco Quotientis.

Secunda ſequitur circa ſequens membrum, & circa reſiduum ſuperioris, ſcilicet circa 697. Geminas

697.	(93
183	
549	

igitur Quotientem totum ſcilicet 9, & habes 18, quæ ſcribis iuxta punctum, deinde per illa 18 diuidis ſuperiorem illi numerum 69; & habes pro Quotiente 3, quæ ponuntur ad punctum ſub 7, & adduntur Quotienti. Poſtea per nouum illum Quotientem 3 multiplicas totum ſuperiorem numerum in puncto, & iuxta punctum poſitum, ſcilicet 183, habeſque 549, quæ ſubtrahis tandem à ſuperiori numero 697, vt habeas reſiduum 148, & dicas radicem dati numeri 8797 eſſe 93, cum ſuperfluis 148. Cæterum ſi quæ occurrant difficultates, hæ ſoluuntur ex legibus in Diuiſione allatis.

Pag. 178. lin. 6. 2. *pro* 23.

pag. 183. lin. 19. 8. *pro* 18

pag. 185. lin. proantep. $\frac{24}{8}$ *pro* $\frac{24}{3}$

pag. 188. lin. vlt. redeat *pro* reddat.

pag. 189. lin. 4. 100. *pro* 110.